# Wettbewerbsarbeit für Schweizer Jugend forscht

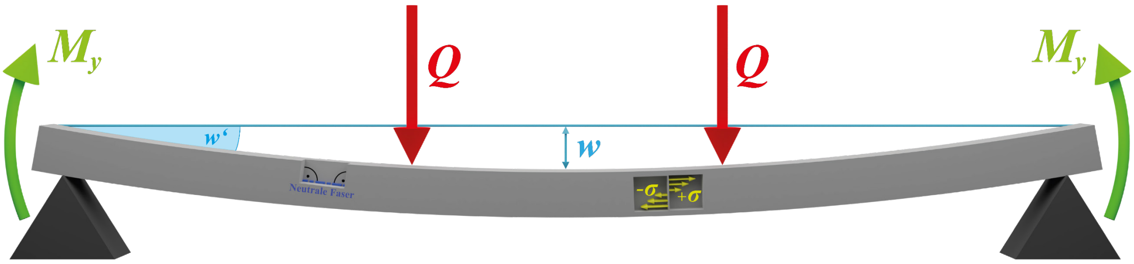



*Abb. 1.1 Modellbalken mit modelliertem Vierpunktbelastungsversuch*

## Theoretische und experimentelle Untersuchung der Balkentheorie anhand eines Stahlträgers


Frei Justin, G19s

Kreuzbergstrasse 52

6252 Dagmersellen

Betreuungslehrperson:

Dr. rer. nat. Chiantese Stefano

Birkenstrasse 3

5742 Kölliken


26.03.2023

Kantonsschule Sursee

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Abstract

In unserem Alltag begegnen wir ständig Konstruktionen, die grundsätzlich als Balken oder Balkenkonstruktionen angesehen werden können. Meist sind wir uns diesen aber gar nicht bewusst und doch sind sie allgegenwärtig und Grundpfeiler unserer Infrastruktur. Für den Bau und Erhalt solcher Konstruktionen ist es somit entscheidend, die Belastbarkeit und das Verhalten eines Balkens berechenbar zu machen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einem dieser Ansätze, um die Durchbiegung und Belastbarkeit eines Balkens bestimmen zu können. Zu Beginn werden die benötigten physikalischen Grundlagen wie Spannung, Dehnung und Biegung erklärt. Anschliessend wird die Euler-Bernoulli-Balkentheorie vorgestellt und dabei spezifisch Wert auf das Erklären der 1. Ordnung gelegt. Mit Hilfe der Grundlagen und den Hypothesen der Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung wurde ein Versuchsaufbau in Zusammenarbeit mit der Hochschule Luzern (HSLU) geplant. Als Ergebnis entstand ein Vierpunktbelastungsversuch mit einem 3300 mm langen *HEA 140 S235* Träger. Für diesen Träger wird mit der Euler-Bernoulli-Balkentheorie die Biegelinienfunktion hergeleitet, mit den dazugehörigen Verlaufsfunktionen für die Schnittgrössen.

Zusätzlich wird in der Theorie die heutzutage gängigere Methode des Arbeitssatzes eingeführt. Die Gleichungen sind schlussendlich dieselben, wie bei der Herleitung mittels Differentialgleichungen, jedoch etwas einfacher zu bestimmen.

Für den Versuch wird zuerst an der HSLU eine Werkstoffprüfung durchgeführt, welche das sogenannte Elastizitätsmodul oder in Laiensprache gesagt, die Stärke des Stahls angibt. Die gemessenen Werte des E-Moduls liegen höher, als der dazugehörige Referenzwert, weshalb mit Unterschätzungen in der Theorie zu rechnen ist. Weiter wird nun der Vierpunktbelastungsversuch an einer für solche Belastungsversuche vorgesehenen Maschine an der HSLU durchgeführt.

Die Messungen liefern Durchbiegungswerte, die um 23 - 24 % über dem erwarteten Wert liegen. Es werden einige Annahmen zur Ursache dieser grösseren Abweichung der Resultate gemacht. Eine davon ist die vermutliche Fehlmessung des E-Moduls, sowie eine Schwäche im Balken selbst. Durch Grenzwertrechnungen der Parameter kann eine Maximaldurchbiegung berechnet werden, welche nur noch um 1.51 % von den Experimentalwerten abweicht. Die Genauigkeit auf absoluter Basis der Euler-Bernoulli-Balkentheorie kann somit nicht ohne weiteres bestätigt werden. Lediglich auf relativer Basis und mit Hilfe von Grenzwertrechnungen und durch das Vergleichen der Biegelinienform kann eine Aussage der näherungsweisen Übereinstimmung getroffen werden.

# 2 Einleitung

## 2.1 Motivation

Die persönlichen Interessen des Autors an der Bauphysik veranlassten ihn dazu, das Baumaterial Beton, gemischt mit dem neuartigen Material Graphen, mit der Balkentheorie zu untersuchen. Die Durchführung eines Experiments mit Beton erwies sich aber als ökonomisch ungeeignet für eine Maturaarbeit. Weiter würde die Inhomogenität von Beton – Beton benötigt Bewehrungseisen – dazu führen, dass die Balkentheorie-Untersuchung deutlich komplexer und womöglich auch ungenauer werden würde. Aus diesen Gründen wird nun das als homogen angesehene Material Stahl in Form eines Balkenträgers genommen. Das Vergleichen der Theorie mit einem experimentellen Versuch und die daraus folgenden Abweichungen zu analysieren, gehört zum Hauptinteresse des Autors.

## 2.2 Fragestellung und Zielsetzung

In der Arbeit liegt die Zielsetzung vor, dass ein Verständnis für die Balkentheorie erlangt werden kann, um anschliessend durch einen Vergleich der theoretischen Rechnung mit dem Experiment mögliche Abweichungen zwischen Theorie und Experiment zu erkennen und diese zu analysieren.

Die Zielsetzung wird in folgende Einzelpunkte aufgegliedert:

1. Es werden theoretische Grundlagen erarbeitet, um anschliessend eine Theorierechnung der Balkentheorie vorzunehmen.
2. Ein Experiment mit den grundlegenden Parametern der theoretischen Rechnungen wird erarbeitet und durchgeführt.
3. Die erhaltenen Daten werden ausgewertet und analysiert.
4. Ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment wird gezogen, um mögliche Abweichungen festzustellen und deren Ursachen und die damit verbundenen Schwachpunkte der Theorie in Verbindung gesetzt.

## 2.3 Hinweis zu den Quellen dieser Arbeit

Jegliche Theorie und Erklärung, welche paraphrasiert oder zitiert wird und nicht ausdrücklich mit der dazugehörigen Quelle gekennzeichnet ist, stammt aus dem Lehrbuch *«Technische Mechanik 2. Elastostatik: Nach fest kommt ab»* von Christian Spura [1].

Alle Grafiken, welche nicht ausdrücklich mit einer Quelle versehen sind, wurden vom Autor selbst gezeichnet oder modelliert. Für die 3D-Modellierung wurde das Open-Source-Programm *Blender* verwendet und für die 2D-Zeichnungen *Adobe Illustrator*. Die Diagramme wurden mit Hilfe von *LaTeX* und dem dazugehörigen Add-on *pgfplots* erstellt. Die Datenauswertung wurde mit Hilfe des Tabellenkalkulationsprogrammes *Excel* und der Software *GeoGebra* durchgeführt.

## 2.4 Theoretische Begriffe

### 2.4.1 Begriff des Balkens und die Balkentheorie

Der Begriff Balken kann auf verschiedenste Weise definiert werden. Meistens bezieht sich dabei der Begriff aber auf das Bauteil; *«Ein geometrisch definierter Querschnitt (quadratisch, rund, rechteckig) und eine im Verhältnis dazu große Länge, bestimmen seine Form.»*[2]. In der Baustatik wird der als Bauteil definierte Balken noch spezifiziert: *« […] Bauteil, das im Unterschied zum Stab senkrecht zu seiner Längsachse belastet wird.»*[2]. Das Fachgebiet, das sich mit dem oben definierten Balken auseinandersetzt, ist die Balkentheorie. Diese Theorie dient zur Berechnung der Biegung eines Balkens unter einer Belastung. Ein Balken kann auch als Träger bezeichnet werden, wenn er nur teilweise aufliegend ist.

### 2.4.2 Euler-Bernoulli-Balken

Wie für viele Dinge in der Physik, gibt es auch bei der Balkentheorie nicht nur ein Modell, sondern mehrere. Zu den Bekanntesten gehören unter anderem das Modell des Euler-Bernoulli-Balkens, sowie das Modell des Timoshenko-Balkens. In dieser Arbeit wird lediglich der Euler-Bernoulli-Balken betrachtet. Der Hauptunterschied zum Timoshenko-Balken liegt darin, dass die Balkenquerschnitte stets orthogonal zur deformierten Balkenachse stehen und der Balken als schubstarr angenommen wird. Weiteres dazu in Abschnitt 2.5.3 unter *«Schubstarrheit»*.

**Werkstoff**

Insgesamt gibt es gut 3500 Stahlsorten [3], jede mit unterschiedlichen Zusammensetzungen und Eigenschaften. Die DIN EN 10020:2000-07 *Begriffsbestimmungen für die Einteilung der Stähle* definiert Stahl in Punkt 2.1 wie folgt:

> *«[Stahl ist ein] Werkstoff, dessen Massenanteil an Eisen größer ist als der jedes anderen Elements, dessen Kohlenstoffgehalt im Allgemeinen kleiner als 2 % ist und der andere Elemente enthält. Eine begrenzte Anzahl von Chromstählen kann mehr als 2 % Kohlenstoff enthalten, aber 2 % ist die übliche Grenze zwischen Stahl und Gusseisen.»*[4]

Stahl ist somit kein Element, sondern ein Werkstoff aus mehreren Elementarstoffen wie Eisen und Kohlenstoff. Das erklärt die Möglichkeit, eine so grosse Anzahl an verschiedenen Sorten herstellen zu können.

Für den Versuch in dieser Arbeit wird der Baustahl *S235JR + AR* verwendet. Die Bezeichnung folgt der Europäischen Norm DIN EN 10025-2, siehe Quelle [5]. *«S»* Steht dabei für die Einteilung in Baustahl und *«JR»* für den Qualitätswert bei einem sogenannten *«Aufprall-Energiewert»* Testverfahren. *«AR»* weist darauf hin, dass der Stahl warmgewalzt wurde. Die Dichte beträgt rund $8\ \text{g/cm}^3$ und liegt allgemein bei Stahl zwischen $7.85\ \text{g/cm}^3$ und $8.05\ \text{g/cm}^3$ [6].

**Stahlbalkenprofil**

Je nach Art der Verwendung und Belastung werden unterschiedliche Balkenquerschnitte benötigt, jeder mit eigenen Vor- und Nachteilen. Sogenannter Profilstahl ist ein Stahlträger, der über seine gesamte Länge denselben Querschnitt beibehält. Die einzelnen Teile des Profils werden unterschiedlich benannt. Bei dreischenkligen Stahlprofilen nennt man die äusseren Schenkel «*Flansch»* und den verbindenden Mittelteil *«Steg»* [7].

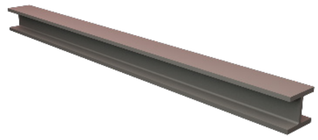


*Abb. 2.1 Breitflanschträger Modell*

**Breitflanschträger**

Der in der Arbeit verwendete Balken gehört zu den Breitflanschträgern[1] (Abb. 2.1 und Abb. 2.2) und wird nach handelstypischer Bezeichnung für DIN-Profile[2] als *HEA*-Träger bezeichnet. HEA ist der Leichteste und Dünnste der Breitflanschträger. *HEB* ist ein mittelschwerer Träger und ein *HEM* Träger ist der Schwerste und Breiteste. Die genaue Bezeichnung lautet *HEA 140* Träger. Die Zahl gibt die Breite in Millimeter des Flansches an, welche somit 140 mm beträgt.

*Abb. 2.2 HEA-Träger, Profilansicht*

### 2.4.3 Weitere Theorien

Nebst der Euler-Bernoulli-Balkentheorie und dem Herleiten der Gleichungen mittels Differentialgleichungen wird heute oft die Methode des Arbeitssatzes und das Prinzip der virtuellen Arbeit verwendet. Diese werden später noch eingeführt und erklärt. Aber auch nebst diesen Theorien gibt es noch viele andere Möglichkeiten das Durchbiegung zu berechnen. Diese Arbeit umfasst somit nur einen kleinen Bereich der Möglichkeiten. Oft hängt die Wahl der gewählten Theorie von Komplexität und gewünschten Genauigkeit der Berechnungen ab.

[1] Umgangssprachlich als Doppel-T-Träger oder «*Peiner Träger*» bezeichnet [8]

[2] DIN 1025-3 (HEA) [9]

### 2.4.4 Auflagearten

Der Balken kann auf verschiedene Art und Weise befestigt beziehungsweise gelagert werden. Die Art der Lagerung hat einen Einfluss auf die Verformung, Kräfteverteilung, Momentverteilung und Spannungsverteilung. Deshalb werden kurz drei gängige Auflagearten mit ihren Freiheitsgraden vorgestellt.

**Festlager**

Bei einem Festlager ist das Ende des Trägers unbeweglich befestigt (Abb. 2.3). Jegliche Verschiebung wird damit unterbunden. Die Bewegungsmöglichkeit wird so auf einen Freiheitsgrad, die Verdrehung, beschränkt. Diese Befestigungsart hat aber zur Folge, dass die Spannungen im Balken und die horizontalen Kräfte auf die Auflager deutlich grösser werden [10] [11].

*Abb. 2.3 Beidseitiges Festlager*

**Loslager**

Beim Loslager (Abb. 2.4) kann sich der Träger in die parallel zur Länge liegende Richtung verschieben. Der Balken hat somit den Freiheitsgrad der Torsion und den Freiheitsgrad einer eindimensionalen Bewegung entlang der Balkenlängsachse. Oft wird der Träger für Biegeversuche auf der einen Seite auf ein Festlager befestigt und auf der anderen Seite auf einem Loslager gelagert [10] [11]. Die Darstellungsweise eines Loslagers kann stark variieren und ist in der Abbildung unten nur auf der rechten Seite abgebildet.

*Abb. 2.4 Loslager (rechte Seite)*

**Einspannung**

Der Träger kann auch eingespannt werden (Abb. 2.5). Dabei wird auch die Verdrehung verhindert. Somit besitzt dieser Träger am Auflager keinen Freiheitsgrad mehr, da nebst der horizontalen und vertikalen Bewegung auch die Torsion verhindert wird. Wird ein Träger nur einseitig eingespannt und ist auf der anderen Seite freihängend, so wird er Freiträger genannt [10].

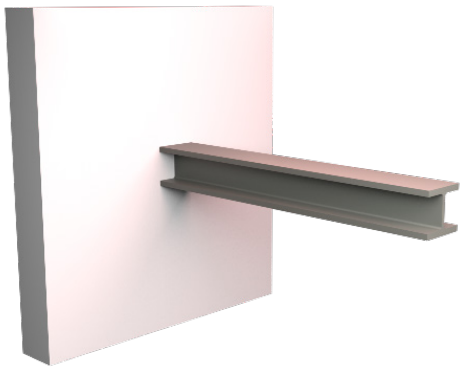


*Abb. 2.5 Freiträger*

### 2.4.5 Lastarten

Ein Balken kann auf unterschiedlichste Art mit einer Last belastet werden. Die Art dieser Belastung hat einen direkten Einfluss auf die Spannungen und Verformungen des Balkens. Grundsätzlich müssen die Kräfte nicht senkrecht auf ein Tragwerk einwirken, sondern können aus jeder beliebigen Richtung wirken. Diese Arbeit wird sich im Hauptteil nur mit senkrecht wirkenden Einzellasten beschäftigen. Trotzdem wird kurz vorgestellt, welche drei Hauptunterscheidungen bei den Lastarten gemacht werden.

**Einzellast**

Dem Namen zu entnehmen, handelt es sich hierbei um eine einzelne Last (Abb. 2.6), welche auf einem einzigen Punkt wirkt. Einfach erklärt, kann sie auch als eindimensionale Last gesehen werden, ausgedrückt mit einem Kraftvektor $\vec{F}$ . Eine Einzellast ist in der Realität grundsätzlich nicht möglich und ist somit nur eine Näherung für kleine Strecken- beziehungsweise Flächenlasten.

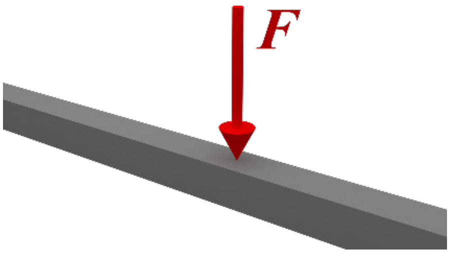


*Abb. 2.6 Einzellast*

**Streckenlast**

Bei der Streckenlast befindet man sich bei der zweidimensionalen Last. Hierbei wird eine Last gleichmässig auf eine Strecke verteilt (Abb. 2.7). Bezeichnet wird die Last als $q_0$. Auch eine Streckenlast ist nur eine Vereinfachung, da es diese, wie eine Einzellast, in der Realität nicht gibt.

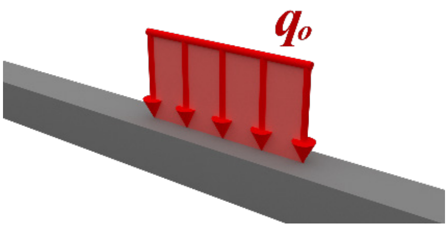


*Abb. 2.7 Streckenlast*

**Flächenlast**

Eine dreidimensionale Last liegt vor, wenn die Last auf einer Fläche gleichmässig verteilt wird (Abb. 2.8). Ähnlich wie bei der Streckenlast, wird die Flächenlast mit $q_1$ bezeichnet. Diese Lastart ist diejenige, die in der Realität vorkommt. Sie macht das Rechnen aber schwieriger, da im dreidimensionalen Raum gerechnet werden muss.

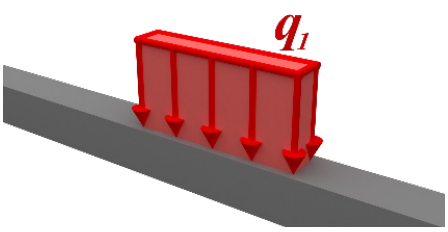


*Abb. 2.8 Flächenlast*

## 2.5 Grundlagen der benötigten Bauphysik

Die in den folgenden Abschnitten verwendeten Ideen, Erklärungen und Theorien stammen paraphrasiert oder zitiert aus Quelle [1]. Jegliche Verwendung anderer Quellen wird deutlich gekennzeichnet.

### 2.5.1 Belastungs- und Spannungsarten

**Definition Normalspannungen**

Als Normalspannungen werden alle Spannungen bezeichnet, die senkrecht zur Schnittebene wirken. Verursacht wird diese Normalspannung durch eine Normalkraft, die auf die Querschnittsfläche $A$ wirkt. Das formale Zeichen für die Normalspannung ist das $\sigma$.

**Zugspannung**

Im Falle eines Balkens tritt Zugspannung auf, wenn eine Kraft bei einem symmetrischen Querschnitt zentrisch in Balkenlängsrichtung wirkt oder bei einem nicht symmetrischen Querschnitt die Belastung durch den Flächenschwerpunkt geht.

Als Grundlage wird hier das 3. Newtonsche Gesetz «*actio = reactio*» verwendet. Aus diesem folgt, dass die Zugkraft $F_z$ im Inneren des Balkens eine gleich grosse, aber entgegengesetzte Normalkraft $F_N$ verursacht.

Mit Hilfe der zuvor erwähnten Definition einer Normalspannung und der Eigenschaft einer Normalspannung, dass sie die Kraft bezogen auf die Querschnittsfläche ist, kann diese Aussage formalisiert werden und die Spannung mit folgender Gleichung ausgedrückt werden:

$$\sigma_Z = \frac{F_Z}{A} \mathrel{\hat{=}} \frac{F_N}{A} \tag{2.1}$$

Die Masseinheit der Zugspannung ist [N/mm$^2$] oder [MPA] Mega Pascal.

$$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{MPa}$$

**Druckspannung**

Druckspannungen treten in einem Balken unter den gleichen Bedingungen wie die gerade erklärten Zugspannungen auf.

Da Druckspannung das Umgekehrte einer Zugspannung ist, kann hier analog zur Zugspannung die Gleichung für die Druckspannung wie folgt definiert werden:

$$\sigma_d = -\frac{F_d}{A} \tag{2.2}$$

Zu beachten gilt, dass das Vorzeichen in Gleichung (2.2) nicht physikalisch begründet ist, sondern durch eine Konvention festgelegt wurde und bei den Zugspannungen (Gleichung (2.1)) immer als positiv angesehen werden.

### 2.5.2 Verzerrungszustand

Balken, welche durch eine äussere Kraft belastet werden, deformieren sich. Unterteilt wird diese Deformation in eine Verzerrung und eine Verschiebung. In dieser Arbeit wird aber aufgrund der Annahme eines Schubstarren Balkens (weiteres dazu in diesem Abschnitt unter *«Gleitung»*) keine Verschiebung angenommen.

**Dehnung**

Dehnung ist nichts anderes als eine relative Längenänderung des Balkens. Zur Dehnung gehört das Strecken (positive Dehnung), aber auch das Stauchen (negative Dehnung).

Die Dehnung kann beschrieben werden, in dem der Balken in infinitesimale Scheibenelemente mit der Länge $dx$ unterteilt wird. Wird der Balken nun gedehnt, so verlängert sich dieses Scheibenelement um die Länge $du$ und wird um die Länge $u$ verschoben. Aus der nebenstehenden Abb. 2.9 kann entnommen werden, dass die Verschiebung $u$ keinen Einfluss auf die Dehnung hat. Die Dehnung $\varepsilon_x$ kann somit definiert werden als:

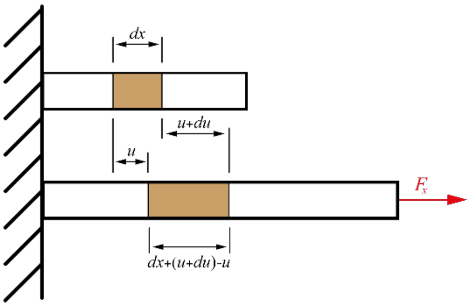


*Abb. 2.9 Ungedehnter und gedehnter Balken*

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\left(dx + \left(u + du\right) - u\right) - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \tag{2.3}$$

Da die Dehnung ein Verhältnis von zwei Längen angibt, ist sie einheitslos. Die Gleichung (2.3) ist vorerst definiert für die eindimensionale Dehnung. Im Dreidimensionalen ergibt sich dabei aber für die Längendehnung dieselbe Gleichung. Lediglich das Verwenden der partiellen Ableitung $\partial$ in die x-Richtung ändert sich.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.4}$$

**Gleitung**

Um die Annahme der Schubstarrheit erklären zu können, wird in diesem Abschnitt der Zusammenhang von Schubspannung und Gleitung erläutert.

Eine von einem rechten Winkel ausgehende Winkeländerung wird als Schubverzerrung oder auch Gleitung bezeichnet (Abb. 2.10). Diese Schubverzerrung entsteht durch die Schubspannung $\tau$. Schubspannungen werden jeweils mit zwei Indizes angegeben. Der erste Index steht dabei für die Richtung der Senkrechten auf der Schnittfläche und der zweite Index für die Wirkrichtung.

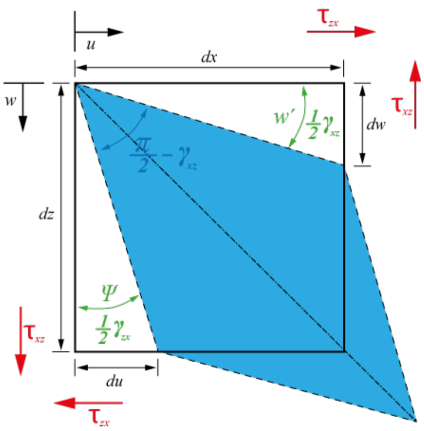


*Abb. 2.10 Infinitesimales Volumenelement unter Einfluss von Schubspannungen*

Die Gleitung kann mit Hilfe der Dehnung allgemein beschrieben werden. Einmal für $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$:

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\gamma_{zx} = \psi \tag{2.5}$$

Und einmal für $\frac{1}{2}\gamma_{xz}$:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \cdot dx}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_{xz} = w' \tag{2.6}$$

Aufgrund der Symmetrie kann die gesamte Gleitung $\gamma_{xz}$ durch Addition der Gleichungen (2.5) und (2.6) dargestellt werden.

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.7}$$

Zuletzt muss noch beachtet werden, dass eine Gleitung nur die Form des Volumenelements ändert, jedoch nicht das Volumen selbst, wie bei der zuvor erklärten Dehnung.

### 2.5.3 Hooke'sches Gesetz & Elastizität

Das Hooke'sche Gesetz beschreibt einen linearen Sonderfall, der den linear-elastischen Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen im Inneren eines Materials beschreibt. Das Gesetz gilt nur für – relativ gesehen – kleine Verformungen, die im elastischen Bereich liegen.

**Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung**

Im Falle der Euler-Bernoulli-Balkentheorie kann das Hooke'sche Gesetz für einen eindimensionalen Spannungszustand direkt aus dem Spannungs-Dehnungsdiagram (Abb. 2.11 [12]) herausgelesen werden. Die Proportionalität der Spannung und Dehnung im linear-elastischen Bereich führt zu einer linearen Veränderung mit einer gewissen linearen Steigung. Diese Steigung entspricht dann dem Elastizitätsmodul *E*.

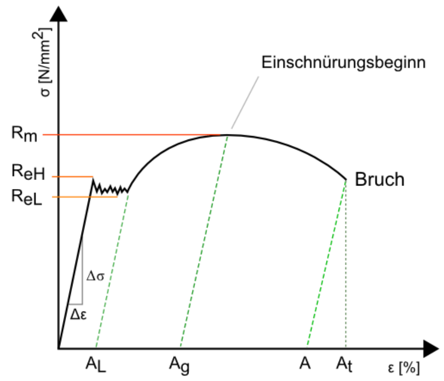



*Abb. 2.11 Spannungs-Dehnungsdiagramm* [12]

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \tag{2.8}$$

Die Gleichung drückt den Zusammenhang zwischen der Spannung und der Dehnung aus und kann durch Umformen ins Hooke'sche Gesetz für die Normalspannung gebracht werden:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{2.9}$$

**Zusammenhang zwischen Schubspannung und Gleitung**

Anstelle des Elastizitätsmoduls *E* für die Normalspannung gibt es ein Gleitmodul *G*. Auch hier gilt das Hooke'sche Gesetz, womit sich das Gleitmodul *G* mit Hilfe des Elastizitätsmoduls *E* und der Querkontraktionszahl $v$ berechnen lässt:

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{2.10}$$

Die Querkontraktionszahl auch *Poisson'sche Zahl*[3] genannt, gibt das Verhältnis zwischen der negativen Querdehnung und der damit verbundenen Längendehnung an. In anderen Worten: Wird ein Körper einer Raumrichtung entlang einer Druckkraft ausgesetzt, so dehnt sich dieser in die anderen beiden Raumrichtungen aus. Die Gleichung (2.11) gibt die Querkontraktionszahl bei einer Druckkraftbelastung in $x$ Richtung an:

$$v = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_{quer}}{\varepsilon_{längs}} \tag{2.11}$$

Das Hooke'sche Gesetz führt zu folgender Gleichung für den Schub:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{2.12}$$

[3] Nach: Siméon Denis POISSON (1781–1840), franz. Physiker, Mathematiker [1]

**Schubstarrheit**

In der realen Welt bleibt die Querschnittsfläche des Balkens bei quer zur Balkenachse angreifenden Kraft nicht eben, sondern verwölbt sich (Abb. 2.12). Dadurch verändert sich die Querschnittsfläche $A$ und wird zur Schubfläche $A_s$.

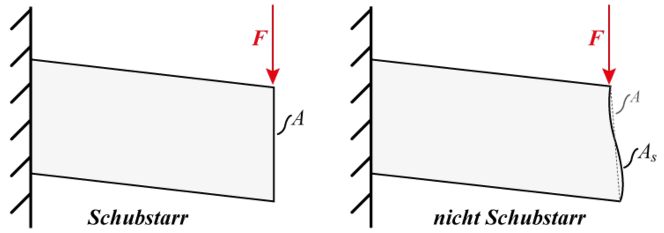



Abb. 2.12 Unterschied Schubstarr, nicht Schubstarr

Die Veränderung eines infinitesimalen Volumenelementes $dV$ bei Schubspannung wurde in Abschnitt 2.5.2 unter *«Gleitung»* aufgezeigt. Die Gleichungen (2.5) und (2.6) für die reine Gleitung können in das Hooke'sche Gesetz für Schub in Gleichung (2.12) eingesetzt werden:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \left( \frac{1}{2}\gamma_{xz} + \frac{1}{2}\gamma_{zx} \right) = G \cdot (w' + \psi) \tag{2.13}$$

Die Verformung kann weiter noch in Relation zu den Schnittgrössen gesetzt werden. Dabei wird die Schubspannung $\tau$ als konstant über die Balkenquerschnittshöhe angesehen. Die Bestimmung der Querkraft besitzt somit die Form:

$$Q_z = \int \tau \, dA = \int G \cdot (w' + \psi) \, dA \tag{2.14}$$

Das Schubmodul $G$, der Verdrehungswinkel $\psi$ und die Neigung $w'$ können vor das Integral gezogen werden, da sie unabhängig von der Querschnittsfläche $A_s$ sind. Wichtig ist, dass die Querschnittsfläche $A_s$ der Schubfläche entspricht und deshalb die Querschnittsfläche $A$ mit dem Schubkorrekturfaktor $\kappa$ angepasst werden muss zu $A_s = \kappa \cdot A$:

$$Q_z = G \cdot \kappa \cdot A \cdot (w' + \psi) \tag{2.15}$$

Neben der Schubverzerrung $w' + \psi$ in Gleichung (2.15) beschreibt das Produkt $G \cdot \kappa \cdot A$ die Schubsteifigkeit.

Nimmt man nun die 2. Bernoulli'sche Hypothese der ebenen Querschnittsfläche – das bedeutet, dass es keine Verwölbung wie oben in Abb. 2.12 rechts gibt – muss die Schubsteifigkeit gegen unendlich gehen: $G \cdot \kappa \cdot A \to \infty$. Dadurch wird eine Schubverzerrung $w' + \psi$ benötigt, die gegen Null strebt, um eine endlich grosse Querkraft $Q_z$ zu erhalten. Somit gilt für die Annahme der Schubstarrheit:

$$w' + \psi = 0 \tag{2.16}$$

# Exkurs Robert Hooke

Dank Experimenten mit Federn konnte Robert Hooke (1653-1703) aufzeigen, dass die Kräfte in elastischen Körpern jeweils proportional zu der Verschiebung sind. Diese Feststellung war die Grundlage des Hooke'schen Gesetzes. Weiter stellte er fest, dass die Balkenfasern eines gebogenen Balkens je nach Position verlängert oder verkürzt werden. Abb. 2.13 zeigt Hookes Erklärung der Balkenbiegung durch Unterteilung des Balkens [13].

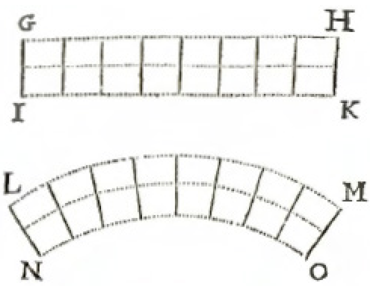



Abb. 2.13 Hookes Erklärung der Balkenbiegung, 1678 [13]

### 2.5.4 Flächenträgheitsmoment

Das Flächenträgheitsmoment ist das Flächenmoment 2. Grades und beschreibt den Widerstand eines Bauteils gegenüber von Biegung und Torsion. Unterteilt wird weiter in das polare Flächenträgheitsmoment für die Berechnung des Widerstands gegen Torsion und das axiale Flächenträgheitsmoment für die Berechnung des Widerstands gegen Biegung [14].

Die allgemeine Form des Flächenmoments *n*-ten Grades sieht wie folgt aus:

$$A_{i,j} = \int_A y^i z^j dA \mid n = i + j \tag{2.17}$$

Der Balken liegt dabei parallel zur x-Achse des Koordinatensystems. Somit liegt die Querschnittsfläche in der y-z-Ebene.

Um ein besseres Verständnis für die Formel zu entwickeln, kann man das Flächenmoment 0. Grades betrachten:

$$A = \int_A dA \tag{2.18}$$

Dieses entspricht der Querschnittsfläche. Von dieser Basis aus wird nun ausgegangen. Die Gleichung für das Flächenträgheitsmoment (Flächenmoment 2. Ordnung) erhält dann diese Gleichungen:

$$I_y = \int_A z^2 dA \tag{2.19}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \tag{2.20}$$

Es werden zwei Gleichungen benötig, da sich das Flächenträgheitsmoment anders berechnet, abhängig davon, ob das Flächenträgheitsmoment längs oder hochkant benötigt wird.

Ein komplexeres Bauteil kann mit Hilfe der Begebenheit der Gleichungen (2.21) und (2.22) berechnet werden.

$$I_{y,tot} = \sum_{i=1}^{n} I_{y,i} \tag{2.21}$$

$$I_{z,tot} = \sum_{i=1}^{n} I_{z,i} \tag{2.22}$$

Dabei ist zu beachten, dass für alle Flächenträgheitsmomente das gleiche Referenzsystem verwendet werden muss. Deshalb wird der sogenannte *Steinersche Satz* hinzugezogen, um komplexe Bauteile in einfachere Formen zu zerlegen und die einzelnen Flächenträgheitsmomente auszurechnen.

Das Bauteil muss so unterteil werden, dass die Drehachse der einzelnen Teile parallel zur originalen Drehachse verläuft. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann der Anteil mit Gleichung (2.23) berechnet werden.

$$I_{i,n} = z_n^2 \cdot A_n \tag{2.23}$$

$z_n$ steht dabei für den Abstand der parallelen Drehachse zur originalen Drehachse des Bauteils und $A_n$ für die Fläche der einzelnen Bauteile.

Um das Flächenträgheitsmoment des gesamten Bauteils zu erhalten (2.24), werden alle Flächenträgheits-Eigenmomente addiert mit dem Steiner Anteil der einzelnen Bauteile.

$$I_{i,ges} = \sum_{u=1}^{n} \left( I_u + I_{u,n} \right) \tag{2.24}$$

Der Index $n$ steht in (2.23) und (2.24) jeweils für die $n$-te Form, in die das Bauteil zerlegt wurde.

# 3 Hauptteil

## 3.1 Herleitung Balkentheorie

### 3.1.1 Ordnungen der Balkentheorie

In der Einleitung wurde bereits darauf eingegangen, welche Balkentheorie für diese Arbeit gewählt wurde. Die Euler-Bernoulli-Balkentheorie hat aber noch drei sogenannte Ordnungen. Jede Ordnung ist eine Präzisierung und Weiterführung der vorherigen Ordnung. Im theoretischen Hauptteil dieser Arbeit wird die erste Ordnung hergeleitet und anschliessend an einem Balken angewendet. Nachfolgend wird kurz erläutert, was der Hauptunterschied zwischen der ersten und zweiten Ordnung ist. Auf die dritte Ordnung wird nicht eingegangen.

**1. Ordnung:**

Die erste Ordnung wird dazu verwendet, um die Gleichgewichtszustände an einem unverformten Balken zu untersuchen. Die Verformungen $w$ sind klein (vgl. 3.1.2). Im Alltag wird häufig nur die erste Ordnung verwendet, da sie ausreichend genau ist.

**2. Ordnung:**

Im Unterschied zur ersten Ordnung werden hier die Gleichgewichtszustände am verformten Balken betrachtet. Die Verformungen $w$ sind immer noch klein, entsprechen aber etwa der Balkenhöhe $h$. Als Faustregel kann angenommen werden, dass diese Theorie im Alltag bis zu einer Neigung von ca. 20° verwendet wird.

### 3.1.2 Modellannahmen der Balkentheorie

Für die Theorie des Euler-Bernoulli-Balkens 1. Ordnung und die gerade Biegung gelten einige Annahmen. Diese werden am Ende in der Diskussion überprüft und es wird beurteilt, ob der im Experiment verwendete Balken diese Bedingungen erfüllt:

- Der Balken ist schlank ($l \geq 5 \cdot b \wedge 5 \cdot h$) (vgl. Abschnitt 3.3.1)
- Ein biegesteifer Balken liegt vor
- Schubstarrer Balken und Querschnittsfläche bleibt gerade
- Balkenquerschnitte sind durchgehend senkrecht zur Balkenachse
- Balken ist gerade
- Keine Verdrehung
- Durchbiegung $w$ nur in Richtung $z$-Achse (Abb. 3.1)
- Externe Kräfte wirken nur in der $x$-$z$-Ebene (Abb. 3.1)
- Verformungen sind klein $w \leq l/500$
- Isotropes und linear-elastisches Materialverhalten
- Biaxiales Flächenträgheitsmoment $I_{xy} = 0$

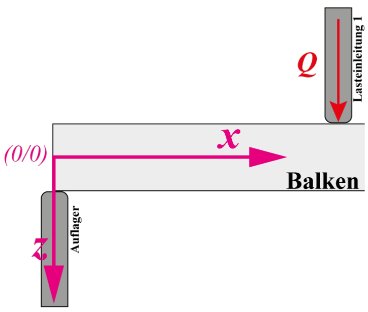


*Abb. 3.1 Wahl des Referenzsystems am Balken*

Kleine Verformungen führen nur zu kleinen Winkeländerungen, weshalb die Kleinwinkelnäherung verwendet werden kann:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \qquad \cos(\alpha) \approx 1 \qquad \tan(\alpha) \approx \alpha \tag{3.1}$$

### 3.1.3 Balkentheorie

Aus dem Abschnitt Grundlagen der Bauphysik 2.5 werden nun die einzelnen Bestandteile zusammengefügt zu den Gleichungen für die Balkentheorie vom Euler-Bernoulli-Balken.

**Biegung und Biegespannung**

Biegungen treten auf, sobald im Inneren des Balkens ein Biegemoment wirkt. Der Balken krümmt sich in Folge eines wirkenden Biegemomentes. Dabei werden einzelne Teile des Balkens gestaucht oder gestreckt. Aus der Abb. 3.2 kann entnommen werden, dass das Material auf der Oberseite gestaucht wird und auf der Unterseite gestreckt. In der Mitte dieser Randfasern gibt es nun eine Faser *dn*, die weder gestreckt noch gestaucht wird. Sie wird auch als neutrale Faser bezeichnet.

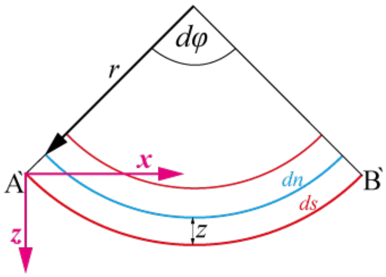



*Abb. 3.2 Infinitesimales Balkenkreisbogensegment*

Bei einer reinen Biegung entsteht beim Betrachten eines infinitesimalen Balkenelementes ein Kreisbogensegment, da die Querschnittsfläche immer senkrecht zur neutralen Faser bleibt. Die neutrale Faser hat dabei den Abstand *r* vom imaginären Kreismittelpunkt. Die Länge einer benachbarten Faser *ds* kann mit Hilfe des Radius *r*, dem Abstand zur neutralen Faser *z* und dem Winkel des Kreissegmentes $d\varphi$ angegeben werden Abb. 3.2.

$$ds = (r + z) \cdot d\varphi \tag{3.2}$$

Diese Gleichung (3.2) wird später weiterverwendet, um die Dehnung ebenfalls mit Hilfe des Kreisbogensegments zu bestimmen. In der nebenstehenden Abb. 3.3 ist die Biegung $w'(x)$ der neutralen Faser, sowie die Verdrehung der Querschnittsfläche *A*, bezeichnet mit $\psi(x)$, zu erkennen.

Die Modellannahmen in Abschnitt 3.1.2 besagen, dass die Querschnittsfläche immer senkrecht zur Balkenachse steht, was hergeleitet unter der Bedingung der Schubstarrheit in Abschnitt 02.5.3 unter *«Schubstarrheit»* folgenden Zusammenhang ergibt:

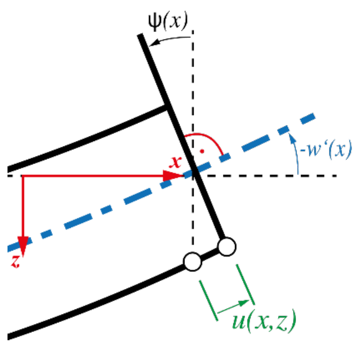



*Abb. 3.3 Veranschaulichung Neigung, Verdrehung und Verschiebung*

$$\psi(x) = -w'(x) \tag{3.3}$$

Die Vorzeichen folgen aus dem gewählten Referenzsystem in Abb. 3.3, welches die positive z-Achse nach unten hat.

Die Modellannahme, dass die Querschnittsfläche immer gerade bleibt, kann benutzt werden, um mit Hilfe der Gleichung des Bogenmasses $b = r \cdot \alpha$ beschreiben zu können, wie fest sich ein Punkt auf dem Balken verschieben wird:

$$u(x,z) = \psi(x) \cdot z = -w'(x) \cdot z \tag{3.4}$$

Die Verschiebung ist wie in Gleichung (3.4) zu erkennen, abhängig von der x-Koordinate, aber auch von der z-Koordinate. Dies aus dem Grund, dass der Balken sich biegt und so die Dehnung zweidimensional stattfindet.

Wird noch die Dehnung aus Abschnitt 2.5.2 miteinbezogen, kann die Gleichung (3.4) darin substituiert werden, um so die Dehnung eines beliebigen Punktes im Balken mit Hilfe dieser Gleichung zu beschreiben:

$$\varepsilon(x,z) = \frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = u'(x,z) = \psi'(x) \cdot z = -w''(x) \cdot z \tag{3.5}$$

Die Gleichung (3.5) ist schwierig zu interpretieren, da dort die zweite Ableitung der Durchbiegung vorkommt, weshalb nun auf Gleichung (3.2) zurückgegriffen wird. Damit kann wiederum mit Gleichung (2.4), welche die Dehnung beschreibt, gearbeitet werden, was folgende Gleichung liefert:

$$\varepsilon_x = \frac{ds - dn}{dn} = \frac{(r+z) \cdot d\varphi - r \cdot d\varphi}{r \cdot d\varphi} = \frac{z}{r} = \frac{z}{r(x)} \tag{3.6}$$

Gleichung (3.5) und (3.6) können beide für die Dehnung verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass der Radius $r$ nicht konstant ist, sondern von der Position $x$ abhängig ist. Deshalb kann er auch als Funktion $r(x)$ geschrieben werden.

Nun wird die Normalkraft und Normalspannung infolge des Momentes $M_y$ berechnet. Aus Abschnitt 2.5.1 weiss man, dass die Zugspannung im unteren Teil des Balkens wirkt und positiv ist und die Druckspannung im oberen Teil wirkt und negativ ist. Demzufolge sind auch die Normalkräfte oben negativ $-dN$ und unten positiv $+dN$. Zusammen mit dem Kräftegleichgewicht kann die Normalkraft $dN$ über die gesamte Querschnittsfläche $A$ integriert werden:

$$\sum F_x = \int dN = N = 0 \tag{3.7}$$

Wie bei einer reinen Biegung zu erwarten ist, sind die resultierenden Kräfte, welche in die Balkenlängsrichtung wirken, gleich Null.

Anschliessen kann eine Beziehung zwischen der Normalspannung $\sigma_x$ und dem Moment $M_y$ hergestellt werden. Mit dem Momentengleichgewicht um die y-Achse:

$$\sum M_y = -M_y + \int z \cdot \sigma_x(z) \cdot dA = 0 \tag{3.8}$$

$$\Leftrightarrow M_y = \int z \cdot \sigma_x(z) \cdot dA \tag{3.9}$$

Um das Integral in Gleichung (3.9) zu vereinfachen, kann die Normalspannung nicht einfach aus dem Integral gezogen werden, da eine Abhängigkeit zu $dA$ besteht. Aus Gleichung (2.9) in Abschnitt 2.5.3 und Gleichung (3.5) kann $\sigma_x(z)$ substituiert werden um von $dA$ unabhängige Grössen zu erhalten, die vor das Integral gezogen werden können:

$$M_y = \int z \cdot E \cdot \varepsilon \cdot dA \tag{3.10}$$

$$M_y = \int z \cdot E \cdot \psi'(x) \cdot z \cdot dA = E \cdot \psi'(x) \int z^2 \cdot dA \tag{3.11}$$

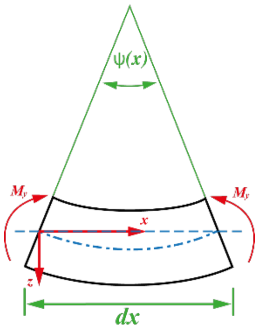


*Abb. 3.4 Proportionale Verdrehung einer infinitesimalen Länge dx*

In Gleichung (3.11) steht nun der Integralausdruck, welcher bereits in Abschnitt 2.5.4 hergeleitet wurde und dem Flächenträgheitsmoment $I_y$ entspricht. Vereinfacht kann das Moment wie folgt dargestellt werden:

$$M_y = EI_y \cdot \psi'(x) \tag{3.12}$$

Wird nun $\psi'(x)$ noch als Differentialquotient in Gleichung (3.12) umgeschrieben, ist zu erkennen, dass die Verdrehung $\psi(x)$ über die Länge $dx$ proportional zum Moment $M_y$ sein muss (Abb. 3.4).

$$M_y = EI_y \cdot \frac{d\psi}{dx} \tag{3.13}$$

Der Ausdruck $EI_y$ beschreibt in der Gleichung (3.13) die sogenannte Biegesteifigkeit. Die Beziehung des Momentes $M_y$ und der Verdrehung wird auch als Elastizitätsgesetz für das Biegemoment bezeichnet.

Da jetzt kein Integral mehr vorkommt, kann die Gleichung für die Normalspannung bestimmt werden. Dazu wird das Elastizitätsmodul $E$ wieder durch die Gleichung (2.8) ersetzt und die darin vorkommende Dehnung $\varepsilon$ durch Gleichung (3.5) ersetzt:

$$M_y = \frac{\sigma_x(z)}{\varepsilon} \cdot I_y \cdot \psi'(x) \tag{3.14}$$

$$M_y = \frac{\sigma_x(z)}{\psi'(x) \cdot z} \cdot I_y \cdot \psi'(x) = \sigma_x(z) \cdot \frac{I_y}{z} \tag{3.15}$$

Einfaches umformen nach der Normalspannung liefert die gewünschte Gleichung:

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \tag{3.16}$$

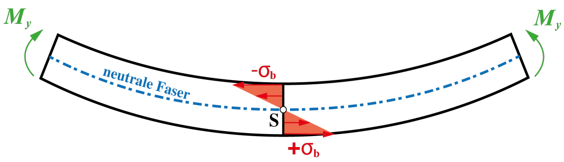


*Abb. 3.5 Längsachsenquerschnitt - Balken mit Biegemomenten*

Gleichung (3.16) zeigt auf, dass die Normalspannung proportional zur Balkenhöhe $z$ ist und somit linear der Höhe entlanglaufen muss. Meist ist aber nicht der lineare Verlauf der Biegespannung von Interesse, sondern die maximale Biegespannung $\sigma_{b,max}$. Diese muss aufgrund der linear verlaufenden Biegespannung an der Ober- und/oder Unterseite auftreten. Die Gleichung für die maximale Biegespannung lautet nun wie folgt:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{\max} \tag{3.17}$$

Bei der Dehnung wird von der neutralen Faser gesprochen. Diese gibt es auch bei den Spannungen, da Spannungen auftreten, wenn es Dehnung gibt. Die neutrale Faser wird auch durch Einsetzen von $z = 0$ bestätigt, da so für die Spannung ebenfalls Null herauskommt. Da die neutrale Faser bekanntlich genau in der Mitte liegt, kann durch die obige Gleichung (3.17) gleichzeitig die maximale Zugspannung an der Unterseite, aber auch die maximale Druckspannung an der Oberseite berechnet werden, da diese betragsmässig gleich gross sind (Abb. 3.5).

### 3.1.4 Biegelinie

Aus den Gleichungen (3.12) und (3.3) in Abschnitt 3.1.3 sind folgende zwei Differenzialgleichungen bekannt:

$$\psi'(x) = \frac{M_y(x)}{E \cdot I_y} \qquad w'(x) = -\psi(x) \tag{3.18}$$

Die Verdrehung $\psi(x)$ soll am Ende nicht mehr in der Gleichung vorkommen. Deshalb wird $\psi'$ in Gleichung (3.18) substituiert mit $-w''$.

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{E \cdot I_y} \tag{3.19}$$

Gleichung (3.19) liefert uns somit die Differenzialgleichung der Biegelinie. Häufig gibt es hier das Problem, dass der Momentenverlauf $M_y(x)$ nicht bekannt ist. Im Falle dieser Arbeit ist dieser Verlauf aber bekannt. Aus diesem Grund wird nur noch umgeformt, um für die nachfolgenden Schritte das Ganze einfacher zu gestalten.

$$E \cdot I_y \cdot w''(x) = -M_y(x) \tag{3.20}$$

Nun liegt mit der Gleichung (3.20) eine Differenzialgleichung vor, die nur noch von der Biegesteifigkeit $EI_y$ und dem Moment $M_y$ abhängig ist.

Um weiter machen zu können, wird nun ein theoretischer Versuchsaufbau benötigt. Dazu wird der exakt selbe Aufbau wie im späteren Experiment verwendet (Abb. 3.6). Es ist zu erkennen, dass der Balken in drei Segmente unterteilt werden kann. Diese Unterteilung hilft dabei, die einzelnen Schnittgrössen in diesen Segmenten bestimmen zu können.

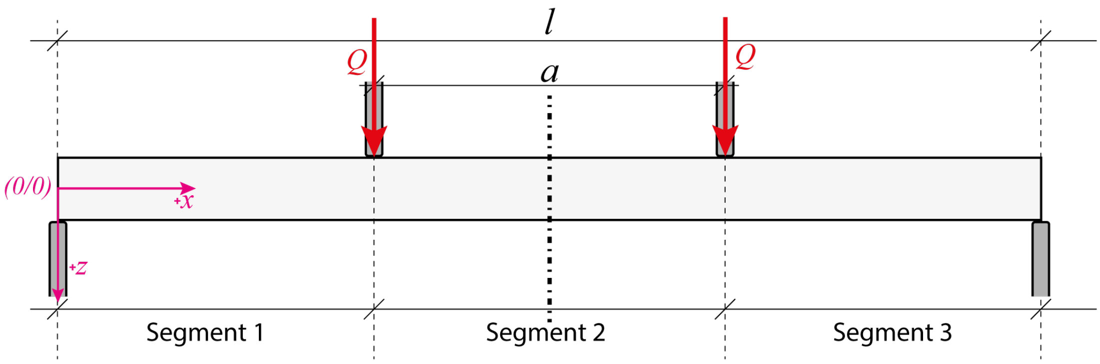



*Abb. 3.6 Längsschnitt Vierpunktbelastungsversuch, eingeteilt in drei Segmente*

Die Schnittgrössen können nun mit Hilfe der beiden statischen Grundgleichungen (3.21) und (3.22) bestimmt werden.

$$\sum F_{ges} = 0 \tag{3.21}$$

$$\sum M_{ges} = 0 \tag{3.22}$$

Die erste Gleichgewichtsbedingung mit Gleichung (3.21) wird unterteilt für jede Dimension. Von Interesse sind die x- und z-Richtungen, wobei die Bedingung für die x-Richtung bereits zuvor in Gleichung (3.7) Abschnitt 3.1.3 erwähnt wurde. Wird die Gleichgewichtsbedingung der Kraft für die z-Richtung des gesamten Balkens aufgestellt, ergibt sich bei $A = B$ und $Q_1 = Q_2 = Q$ folgendes:

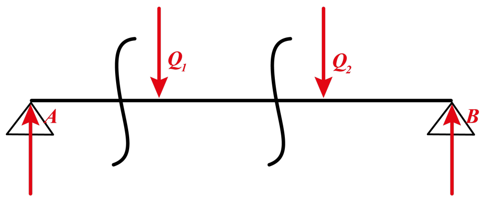



*Abb. 3.7 Übersicht der einzelnen Schnitte für die Schnittgrössenbestimmung*

$$\sum F_z^{ext} = 0 = -A + Q_1 + Q_2 - B \Leftrightarrow Q = A \tag{3.23}$$

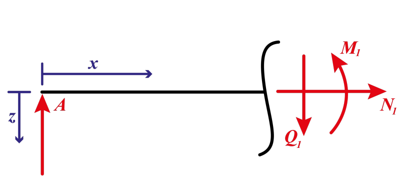



*Abb. 3.8 Schnittgrössenübersicht im Bereich 1*

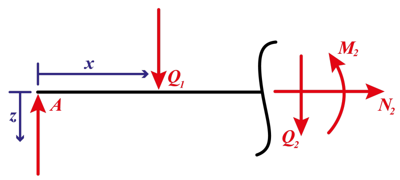



*Abb. 3.9 Schnittgrössenübersicht im Bereich 2*

Anschliessend kann die Gleichgewichtsbedingung für das Moment für den Bezugspunkt im Bereich 1 und dem dazugehörigen Schnitt Abb. 3.8 beschrieben werden mit Gleichung (3.24):

$$\sum M_1^{ext} = 0 = -Ax + M \Leftrightarrow M = Ax \tag{3.24}$$

Da bekannt ist, dass $Q = F/2$ ist, kann die Auflagerkraft $A$ damit substituiert werden und man erhält Gleichung (3.25) für den Momentenverlauf im ersten Bereich.

$$M_1 = \frac{F}{2}x \tag{3.25}$$

Analog zum ersten Bereich werden die Schnittgrössen im Bereich 2 bestimmt (Abb. 3.9). Auch dafür wird wieder die Gleichgewichtsbedingung für die Momente aufgestellt:

$$\sum M_2 = 0 = -Ax + \left(x - \frac{l-a}{2}\right)\frac{F}{2} + M \Leftrightarrow M = Ax - \left(x - \frac{l-a}{2}\right)\frac{F}{2} \tag{3.26}$$

Gleich wie zuvor im ersten Bereich wird hier wieder $A$ mit $F/2$ substituiert, um den schlussendlichen Momentverlauf für den zweiten Bereich zu erhalten:

$$M_2 = \frac{F}{2} \cdot \frac{l-a}{2} \tag{3.27}$$

Für den dritten Bereich kann die Eigenschaft der Symmetrie genutzt werden und die Momentums-Gleichung für diesen Bereich direkt aus Gleichung (3.25) hergeleitet werden.

$$M_3 = \frac{F}{2}(l - x) \tag{3.28}$$

Die drei Gleichungen (3.25), (3.27) und (3.28) in Gleichung (3.20) liefern nun durch zweimaliges Integrieren die Gleichung für die Biegelinie *w(x)*. Für das dritte Segment kann die Eigenschaft der Achsensymmetrie zunutze gemacht werden, indem man Gleichung (3.29) nimmt und *x* mit *(l-x)* substituiert.

$$E \cdot I_y \cdot w_1(x) = \frac{F}{12} x^3 + C_1 x + C_2 \tag{3.29}$$

$$E \cdot I_y \cdot w_2(x) = \frac{F}{8} x^2 \left(l - a\right) + C_3 x + C_4 \tag{3.30}$$

$$E \cdot I_y \cdot w_3(x) = \frac{F}{12} \left(l - x\right)^3 + C_1 \left(l - x\right) + C_2 \tag{3.31}$$

Die Integrationskonstanten können anschliessend mit Hilfe der Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt werden. Aus der Tabelle 3.1 können die Randbedingungen für einen Balken, gelagert auf einem Festlager, entnommen werden und aus der Tabelle 3.2 die Übergangsbedingungen für die drei Segmente.

| **Bezeichnung** | **Querkraft** | **Biegemoment** | **Neigung** | **Durchbiegung** |
|---|---|---|---|---|
| Festlager | $Q_1 \neq 0$ | $M_1 = 0$ | $w'_1 \neq 0$ | $w_1 = 0$ |

*Tabelle 3.1 Randbedingungen Festlager*

| **Übergang** | **Biegemoment** | **Neigung** | **Durchbiegung** |
|---|---|---|---|
| 1 - 2 | $M_1 = M_2$ | $w'_1 = w'_2$ | $w_1 = w_2$ |
| 2 - 3 | $M_2 = M_3$ | $w'_2 = w'_3$ | $w_2 = w_3$ |

*Tabelle 3.2 Übergangsbedingungen Vierpunktbelastung*

Mit Hilfe eines Gleichungssystems können nun die Integrationskonstanten $C_1$ bis $C_4$ bestimmt werden. Gebraucht werden können dabei die Randbedingungen, welche gleich Null ergeben. In diesem Fall sind das $M_1 = 0$ und $w_1 = 0$. Die Lösung der dabei entstehenden Gleichungssysteme kann aus dem Anhang 7.2 entnommen werden. Die vier Integrationskonstanten lauten vereinfacht:

$$C_1 = \frac{F}{16}(a^2 - l^2) \tag{3.32}$$

$$C_2 = 0 \tag{3.33}$$

$$C_3 = \frac{F}{8}\left(a - l\right) l \cdot x \tag{3.34}$$

$$C_4 = -\frac{F}{96}\left(a - l\right)^3 \tag{3.35}$$

Bevor nun die Biegelinienfunktion zusammengesetzt wird, kann mit Hilfe der in Anhang 7.2 aufgeleiteten Momentums-Gleichungen (3.25), (3.27) und (3.28) eine Unterteilung in die einzelnen Verlaufsfunktionen der Schnittgrössen vorgenommen werden. Die untenstehende Abb. 3.10 zeigt qualitativ die Verläufe der Querkraft $Q$, des Moments $M_y$, der Verdrehung $w'$ und der Durchbiegung $w$. Die Gleichung für den Verlauf der Querkraft $Q$ ist nicht im Anhang 7.2 zu finden, ist aber die Ableitung der drei Momentums-Gleichungen (3.25), (3.27) und (3.28).

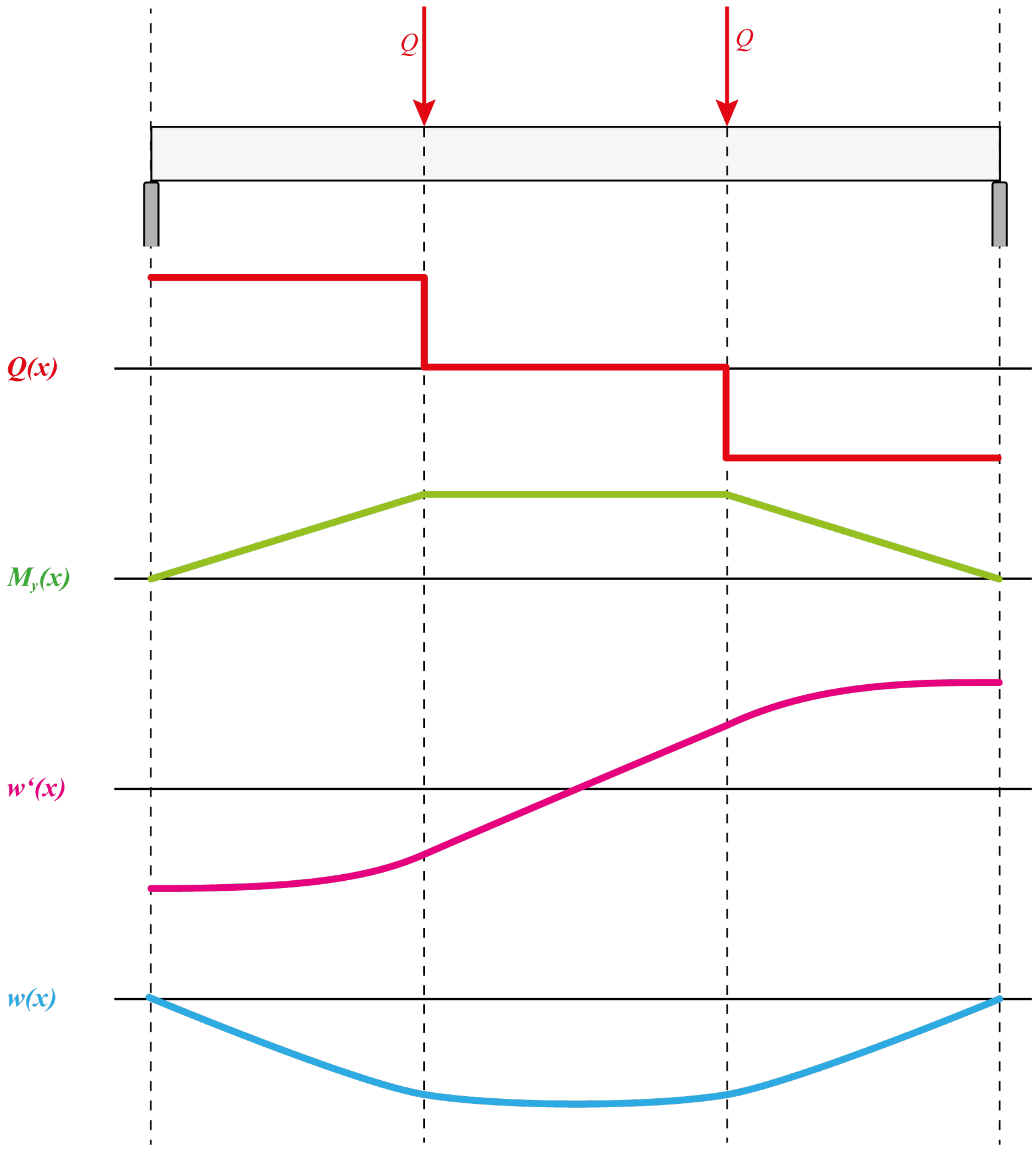



*Abb. 3.10 Verlaufsfunktionen beim Vierpunktbelastungsversuch (qualitativ dargestellt)*

Mit den vier Integrationskonstanten $C_1$ bis $C_4$ kann die vollständige Gleichung für die Biegelinie aufgestellt werden. Zu beachten ist dabei die fallspezifische Unterteilung in Segmente, welche bereits in der vorherigen Abb. 3.10 sowie bei den anfänglichen Momentums-Gleichungen zu sehen war. Für die Anschaulichkeit wurden die Funktionsgleichungen in (3.36) jeweils so umgestellt, dass $\left(a^k - l^k\right)$ in der Form $\left(l^k - a^k\right)$ steht.

Die Biegelinienfunktion für die Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung lautet somit:

$$w(x)=\begin{cases} \dfrac{F}{12E\cdot I_y}x^3-\dfrac{F\left(l^2-a^2\right)}{16E\cdot I_y}x & x\in\left[0,\dfrac{l-a}{2}\right] \\ \dfrac{F\left(l-a\right)}{8E\cdot I_y}x^2-\dfrac{F\left(l-a\right)\cdot l}{8E\cdot I_y}x+\dfrac{F\left(l-a\right)^3}{96E\cdot I_y} & x\in\left]\dfrac{l-a}{2},\dfrac{l+a}{2}\right[ \\ \dfrac{F}{12E\cdot I_y}\left(l-x\right)^3-\dfrac{F\left(l^2-a^2\right)}{16E\cdot I_y}\left(l-x\right) & x\in\left[\dfrac{l+a}{2},l\right] \end{cases} \tag{3.36}$$

## Exkurs Jakob Bernoulli & Leonhard Euler

Jakob Bernoulli (1654-1705) untersuchte mit Hilfe der Infinitesimalrechnung von Isaac Newton (1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) die Verformung von elastischen Stäben. Er stellte die Annahme auf, dass die Stabquerschnitte eben bleiben bei Verformung des Stabes und die Krümmungsänderung proportional zu den biegenden Kräften ist. Zur damaligen Zeit kannte Bernoulli den Begriff der Spannung noch nicht, wodurch ihm das Integral der inneren Kräfte über den Querschnitt fehlte. In Abb. 3.12 ist Jakob Bernoullis Konstruktion einer elastischen Linie zu sehen.
Leonhard Euler (1707-1783) konnte zeigen, dass die Differentialgleichungen der elastischen Linie einem Variationsproblem[4] entsprechen. Dank Eulers ausführlichen Behandlung von elastischen Linien gelang es ihm, die Lösung der Eigenwertprobleme[5] von ausknickenden und transversal schwingenden Stäben zu finden [13]. Abb. 3.11 zeigt Leonard Eulers Auflistung von verschiedenen Biegeproblemen.

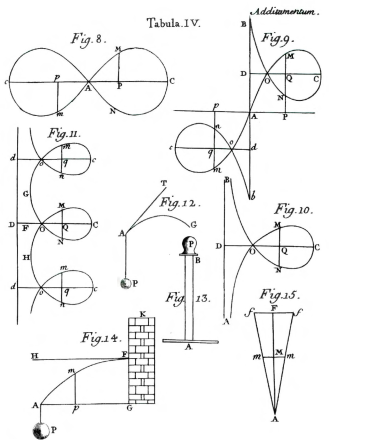



*Abb. 3.11 Leonhard Euler: Biegeprobleme, 1744* [13]

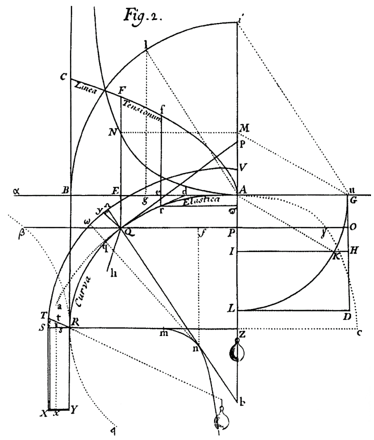



*Abb. 3.12 Jakob Bernoulli: Konstruktion der elastischen Linie, 1694* [13]

[4] Variationsprobleme sind vereinfacht gesagt Optimierungsaufgaben in unendlich vielen Dimensionen.

[5] Beim Eigenwertproblem geht es darum, den Eigenwert $\lambda$ bei quadratischen Matrizen $M$ herauszufinden, damit $M\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$ gilt. [15].

## 3.2 Arbeitssatz

### 3.2.1 Grundlagen

Die Arbeit, welche verrichtet wird, wenn sich ein Körper von $P_1$ nach $P_2$ bewegt und dabei die Kraft $\vec{F}$ auf ihn wirkt, ist allgemein definiert als:

$$W = \int_{P1}^{P2} \vec{F}\, d\vec{r} \tag{3.37}$$

Berechnet man die äussere Arbeit $W$ und innere Arbeit $\Pi$, welche verrichtet wird für eine Dehnung $u$, so gilt:

$$W = \frac{1}{2} F \cdot u \qquad\qquad \Pi = \frac{1}{2} F \cdot u \tag{3.38}$$

Ein Vergleich der beiden Arbeiten führt zu:

$$W = \Pi \tag{3.39}$$

Elastische Systeme speichern somit die Arbeit der äusseren Kräfte in innerer Energie (Formänderungsenergie). Da bei der Balkenbiegung ein elastisches System vorhanden ist, zumindest bis zu gewissen Kräften und Verformungsänderungen, kann die Arbeitssatzgleichung (3.39) verwendet werden. [16]

Nun kann die Arbeit berechnet werden. In diesem Fall wird die innere Arbeit infolge der Spannung $\sigma$ betrachtet.

$$d\Pi = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV \tag{3.40}$$

Das linear-elastische Materialverhalten erlaubt es, Gleichung (3.40) mit $\sigma_x = E\varepsilon_x$ zu erweitern. Weiter kann aufgrund der reinen Biegung, die im Balken dieser Arbeit herrscht, die Spannung abhängig vom Moment beschrieben werden:

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{1}{2E} \cdot \left( \left( \frac{M \cdot y}{I} \right)^2 dA \right) dx = \int_0^l \frac{M^2}{2EI^2} \cdot \left( \int_A y^2 dA \right) dx \tag{3.41}$$

Das letzte Integral in Gleichung (3.41) ist bereits aus vorherigen Abschnitten bekannt als Flächenträgheitsmoment $I$ und führt zur schlussendlichen Gleichung, welche auch im Tabellenwerk[6] zu finden ist (3.42). [17]

$$\Pi = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx \tag{3.42}$$

Der Arbeitssatz gilt auch für virtuelle Arbeit:

$$\overline{W} = \overline{\Pi} \tag{3.43}$$

[6] $\Pi = \int_0^l \Pi^* dx$, wobei $\Pi^*$ aus dem Tabellenwerk Anhang 7.3 entnommen werden kann.[17]

### 3.2.2 Prinzip der virtuellen Kräfte

Um nun die Verschiebung mit Hilfe des Arbeitssatzes bestimmen zu können, kann eine virtuelle Kraft mit gleicher Richtung wie die Verschiebung gesetzt werden. Um das Ganze so einfach wie möglich zu halten, wird die virtuelle Arbeit wie folgt definiert:

$$\overline{W} = \overline{F} \cdot w = \overline{1} \cdot w = w \tag{3.44}$$

Gleichung (3.39) erlaubt es, mit Hilfe einer virtuellen Kraft, die Durchbiegung zu berechnen:

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{F} \cdot w = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

Daraus folgt für die Durchbiegung am Punkt der virtuellen Kraft:

$$w = \int_0^l \frac{M \cdot \overline{M}}{EI} dx \tag{3.45}$$

Dieses Prinzip gilt, wie auch die zuvor hergeleitete Biegelinienfunktion der Balkentheorie, nur für infinitesimale Verformungen.[16]

## 3.3 Theoretische Berechnungen

### 3.3.1 Ausgangslage

Es sind nun alle Gleichungen, die benötigt werden, hergeleitet worden. In den folgenden Abschnitten wird nun auf theoretischer Basis die Balkentheorie angewendet. Dabei wird die Durchbiegung des Balkens mit Hilfe der Biegeliniengleichung ermittelt.

Wie bereits in Abschnitt 2.4.2 erklärt, wird ein *HEA 140 S235* Stahlträger verwendet. Die Dimensionen des in der Theorie berechneten Balkens entsprechen denen des realen Balkens im Experiment.

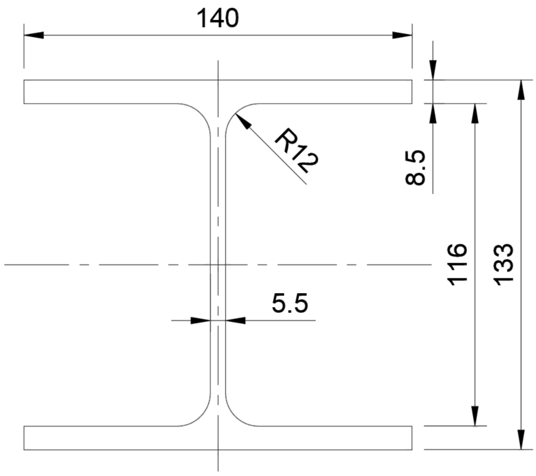



*Abb. 3.13 HEA 140 Abmessungen* [mm]

In der obenstehenden Abb. 3.13 sind die Querschnittsbemessungen des *HEA 140* Trägers abzulesen. Die Länge des Balkens beträgt 3300 mm. Im Experiment dieser Arbeit wird später zu sehen sein, dass der Balken nicht 3300 mm freitragend ist, sondern lediglich 3000 mm, um Stabilität an den Auflagern zu gewährleisten. Wird in den nachfolgenden Abschnitten von einem Balken gesprochen, so wird als Grundlage der Querschnittsbemassung immer von Abb. 3.13 ausgegangen.

### 3.3.2 Werkstoffprüfung

Um die Materialcharakteristik des Stahlbalkens zu ermitteln, musste zuerst eine Werkstoffprüfung durchgeführt werden. Dabei wurden Probestücke (Abb. 3.14) auf ihre Elastizität unter Belastung einer Normalkraft gemessen.

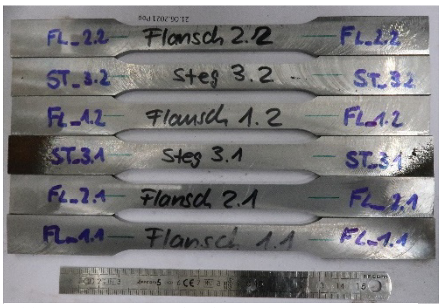



*Abb. 3.14 Probestücke des Stahlträgers*

Die Werkstoffprüfung wurde von einem Labor aus einer anderen Abteilung der HSLU durchgeführt und kann deshalb nicht exakt geschildert werden. Grundsätzlich sind aber die Zugversuche genormt nach DIN EN 10002-1 [18]. Dabei wird zuerst ein Probestab aus dem zu untersuchenden Material hergestellt. Die Form dieses Stabes ist immer gleich. Die breiten Enden werden für die Fixierung in den sogenannten Spannbacken benötigt. Im mittleren geraden Bereich wird anschliessend ein Feinspannungsmesser angebracht [12].

Sobald der Zugversuch gestartet wird, ziehen die Spannbacken die Zugprobe auseinander. So kann zuerst der elastische Bereich ermittelt werden. Sobald die Maximalspannung überschritten wird, beginnt der Stab, beziehungsweis das Material, zu fliessen. An der schwächsten Stelle beginnt die Probe sich zu verjüngen, bis sie schliesslich reisst [12]. Die gemessene Spannung und Dehnung wird in ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm übertragen.

Insgesamt wurden sechs Probestücke untersucht. Vier davon stammen vom Flansch des Trägers und zwei vom Steg des Trägers. In der untenstehenden Abb. 3.15 sind die einzelnen Spannungs-Dehnungsdiagramme jeweils für einen Abschnitt des Balkens aufgelistet. Die Diagramme sind im Anhang unter Abschnitt 7.1 vergrössert zu finden.

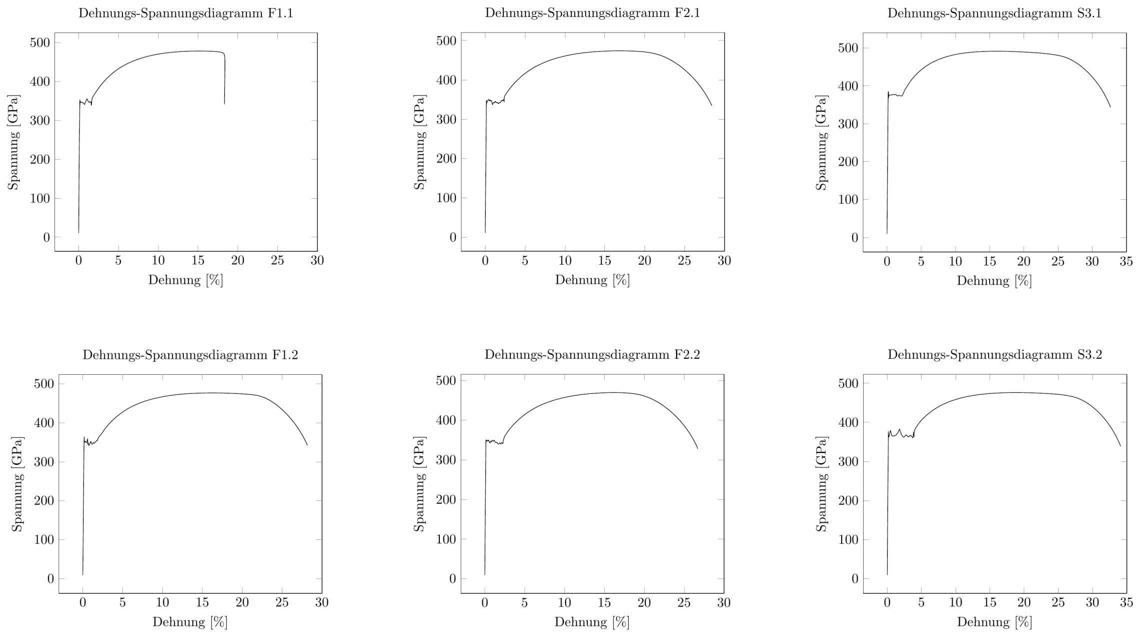



*Abb. 3.15 Spannungs-Dehnungsdiagramme der Werkstoffprüfung*

Aus der Tabelle 3.3 können die einzelnen Messdaten der Materialprüfung entnommen werden, sowie die jeweiligen Mittelwerte, Standartabweichungen und relativen Fehler. $E$ ist das Elastizitätsmodul, $R_{eH}$ die obere Streckgrenze und $R_m$ die Zugfestigkeit.

*Tabelle 3.3 Materialcharakteristik HEA 140 S235 vgl. Dokument 7.1 HSLU Prüfprotokoll Werkstoffcharakteristik HEA140 S235*

| **Probenkennung** | **E** [GPa] | $\mathbf{R_{eH}}$ [MPa] | $\mathbf{R_m}$ [MPa] |
|---|---|---|---|
| F1.1 | 215.60 | 352.31 | 478.44 |
| F1.2 | 227.28 | 363.77 | 476.31 |
| F2.1 | 216.98 | 349.23 | 473.94 |
| F2.2 | 233.24 | 350.72 | 469.64 |
| S3.1 | 224.36 | 385.35 | 491.31 |
| S3.2 | 214.92 | 376.97 | 476.12 |
| | | | |
| **Mittelwert** | 222.06 | 363.06 | 477.63 |
| **Standartabweichung** | 7.43 | 15.17 | 7.34 |
| **relativer Fehler [%]** | 3.35 | 4.18 | 1.54 |

### 3.3.3 Flächenträgheitsmoment HEA 140

Als letztes fehlt noch das Flächenträgheitsmoment, welches mit den Gleichungen aus Abschnitt 2.5.4 berechnet wird. Aufgrund der Komplexität des Bauteils wird folgende Eigenschaft zunutze gemacht:

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{y,ges,i} \tag{3.46}$$

Das Flächenträgheitsmoment $I_z$ ist nicht von Interesse, da die Belastung nur in z-Richtung wirkt und somit das Flächenträgheitsmoment der y-Achse entscheidend ist.

Der Trägerquerschnitt wird in fünf Segmente unterteil (Abb. 3.16) um anschliessend die verschiedenen Flächenträgheitsmomente mit Hilfe von Gleichung (3.46) aufzusummieren, um das gesamte Flächenträgheitsmoment des Stahlträgerquerschnittes zu erhalten. Für die ersten drei Segmente kann die Gleichung (2.19) aus Abschnitt 2.5.4 verwendet werden und wenn nötig der Steineranteil mit Gleichung (2.23) noch addiert werden.

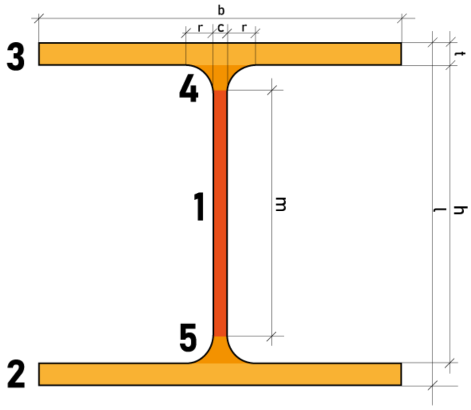


Abb. 3.16 Segmentunterteilung HEA 140 S235

So erhält man für die ersten drei Flächenträgheitsmomente folgende Gleichungen:

$$I_{y,1} = \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} z^2 dA = \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} z^2 c \cdot dz = \frac{c \cdot m^3}{12} \tag{3.47}$$

$$I_{y,2} = I_{y,3} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dA + z_2{}^2 \cdot (b \cdot t) = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 b \cdot dz + \left(\frac{h+t}{2}\right)^2 \cdot (b \cdot t) = \frac{b \cdot t^3}{12} + \frac{b \cdot t \cdot (h+t)^2}{4} \tag{3.48}$$

Aus den beiden Gleichungen (3.47) und (3.48) sowie den Bemassungen aus Abb. 3.13 folgen die Zwischenergebnisse für die Flächenträgheitssegmente 1, 2 und 3:

$$I_{y,1} \approx 356898.67\,\text{mm}^4 \qquad I_{y,2} = I_{y,3} \approx 4618489.17\,\text{mm}^4 \tag{3.49}$$

Die beiden Segmente *4* und *5* müssen aufwendiger berechnet werden, da die Segmente krummlinig begrenzt sind und folglich der Schwerpunkt mit der allgemeinen Schwerpunktgleichung beschrieben werden muss. Als Ausgangslage wird die Gleichung (3.47), welche das Flächenträgheitsmoment für allgemeine Rechtecke beschreibt, verwendet. Dabei läuft $\Delta x \rightarrow 0$ und folglich wird $\Delta x$ zu $dx$ (Gleichung (3.50) zusammen mit Abb. 3.17). Somit muss ein weiteres Integral berechnet werden.

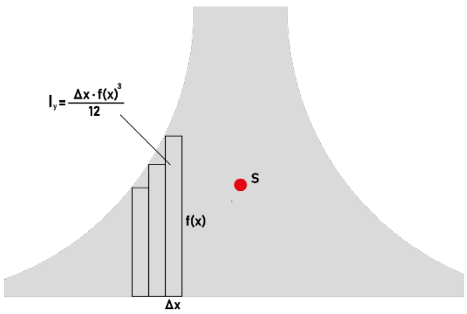


Abb. 3.17 Ausschnitt aus Segment 5 (Abb. 3.16)

$$I_{y,5} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=-r-\frac{c}{2}}^{r+\frac{c}{2}} \frac{\Delta x \cdot f(x)^3}{12} + z_n^2 \cdot A_n = \int_{-r-\frac{c}{2}}^{r+\frac{c}{2}} \frac{f(x)^3}{12} dx + z_n^2 \cdot A_n \tag{3.50}$$

Die Funktion *f(x)* beschreibt das krummlinig begrenzte Viereck aus Abb. 3.17:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r^2 - (x+r)^2} + r & x \in \left[-r, -\frac{d}{2}\right] \\ r & x \in \left]-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right[ \\ -\sqrt{r^2 - (x-r)^2} + r & x \in \left[\frac{d}{2}, r\right] \end{cases} \tag{3.51}$$

Um den Steineranteil bestimmen zu können, wird der Abstand vom Gesamtschwerpunkt zum Segmentschwerpunkt benötigt. Das Thema dieser Arbeit soll aber nicht die Schwerpunkts-Koordinatenberechnung sein. Deshalb wird die Gleichung für den Segmentschwerpunkt lediglich in ihrer Endfassung [19] niedergeschrieben und ergibt eingesetzt in Gleichung (3.50):

$$I_{y,4} = I_{y,5} = \int_{-r-\frac{c}{2}}^{r+\frac{c}{2}} \frac{f(x)^3}{12} dx + \left( \frac{h}{2} - \frac{\int_{-r-\frac{c}{2}}^{r+\frac{c}{2}} |f(x)|^2 \, dx}{2 \cdot \int_{-r-\frac{c}{2}}^{r+\frac{c}{2}} f(x) dx} \right)^2 \cdot \int_{-r-\frac{c}{2}}^{r+\frac{c}{2}} f(x) dx \tag{3.52}$$

$$I_{y,4} = I_{y,5} \approx 369'214.92 \, \text{mm}^4 \tag{3.53}$$

Durch Anwenden von Gleichung (3.46) kann schliesslich das gesamte Flächenträgheitsmoment bestimmt werden.

$$I_{y,total} = \sum_{i=1}^{5} I_{y,i} \approx 10'330'344 \, \text{mm}^4 \tag{3.54}$$

Das Flächenträgheitsmoment in Gleichung (3.54) ist der theoretische Wert. Da in der Praxis eine Fehlertoleranz für die Querschnittbemassungen gilt, können diese abweichen. Aus diesem Grund wird nachfolgend durch eine Grenzwertrechnung mit Hilfe der Fehlertoleranzen das stärkste mögliche und das schwächste mögliche Flächenträgheitsmoment berechnet.

Die nachfolgende Tabelle zitiert Grenzabmasse und Formtoleranzen nach DIN EN 10034 [20].

*Tabelle 3.4 Grenzabmasse und Formeltoleranzen*

| **Profilhöhe *h*** | | **Flanschbreite *b*** | | **Stegdicke *c*** | | **Flanschdicke *t*** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nennmass [mm] | Grenzabmass [mm] | Nennmass [mm] | Grenzabmass [mm] | Nennmass [mm] | Grenzabmass [mm] | Nennmass [mm] | Grenzabmass [mm] |
| $h \leq 180$ | $+3.0$<br>$-2.0$ | $110 < b \leq 210$ | $+4.0$<br>$-2.0$ | $s < 7$ | $+0.7$<br>$-0.7$ | $6.5 \leq t < 10$ | $+2.0$<br>$-1.0$ |

Um die Grenzwerte zu erhalten, wird nun für das grösstmögliche Flächenträgheitsmoment jeweils der maximale Querschnittbemassungswert verwendet und für das Kleinstmögliche die minimalen Querschnittbemassungen. Daraus ergeben sich folgende maximalen Flächenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned} &I_{y,1,\max} \approx 389'345.02\,\text{mm}^4 && I_{y,2,\max} = I_{y,3,\max} = 5'967'486.00\,\text{mm}^2 \\ &I_{y,4,\max} = I_{y,5,\max} \approx 383'773.98\,\text{mm}^4 && I_{y,tot,\max} \approx 13'091'864.97\,\text{mm}^4 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Und für die minimalen Flächenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned} &I_{y,1,\min} \approx 311'475.2\,\text{mm}^4 && I_{y,2,\min} = I_{y,3,\min} \approx 3'951'371.25\,\text{mm}^4 \\ &I_{y,4,\min} = I_{y,5,\min} \approx 345'442.45\,\text{mm}^4 && I_{y,tot,\max} \approx 8'905'102.61\,\text{mm}^4 \end{aligned} \tag{3.56}$$

### 3.3.4 Berechnung der Durchbiegung (innerhalb 1. Ordnung)

Nachdem alle Parameter berechnet wurden, kann nun damit begonnen werden, die Durchbiegung und Verformung des Balkens zu berechnen. Im ersten Abschnitt werden die Verformungen bei verschieden grossen Kräften berechnet, welche Verformungen ergeben, die zulässig für die 1. Ordnung sind.

In der untenstehenden Abbildung (Abb. 3.18) ist der genaue Aufbau des theoretischen und später praktischen Versuches mit den Längenangaben herauszulesen.

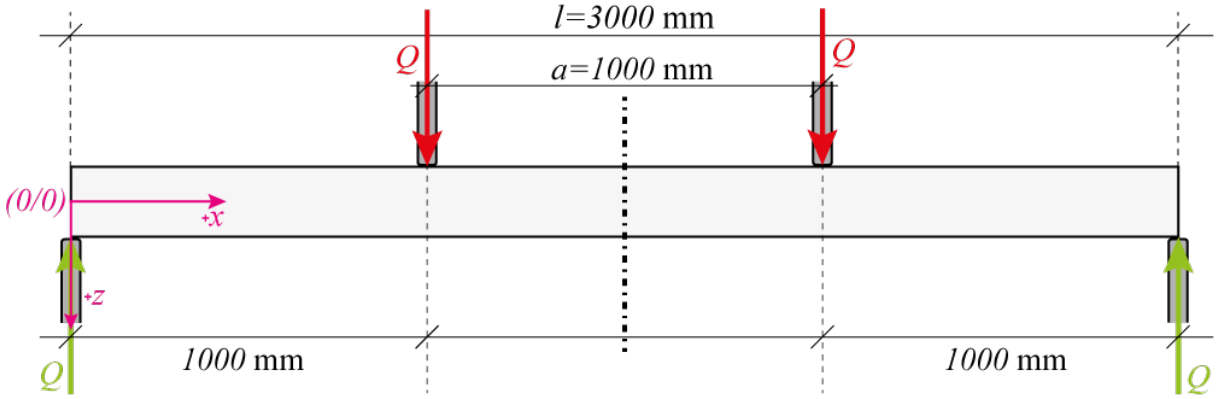



*Abb. 3.18 Theoretischer Versuchsaufbau des Vierpunktbelastungsversuchs*

Wichtig ist die Definition der Kraft $Q$, welche $Q = F/2$ lautet. Die Maschine übt die Kraft $F$ aus, welche gleichmässig bei $x_1 = 1000\,\text{mm}$ und $x_2 = 2000\,\text{mm}$ eingeleitet wird.

Wie zuvor erwähnt, muss zuerst der Bereich der Kraft abgegrenzt werden, welcher die Bedingungen der Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung erfüllt. Dazu gehört, dass die Durchbiegung $w(x)$ kleiner als $l/500$ oder 6 mm sein muss. Es muss deshalb die Kraft $F_{max}$ berechnet werden, damit die Durchbiegung kleiner als 6 mm bleibt. Das kann mit Gleichung (3.57) gelöst werden, wobei $w(x)$ von der hergeleiteten Biegelinienfunktion (3.36) stammt:

$$l/500 = w(1500) \tag{3.57}$$

Die Funktion muss dann nach $F$ beziehungsweise $F_{max}$ umgestellt werden, was zu folgender Kraft führt:

$$F_{\max} = 28'724.51\,\text{N} \approx 28.7\,\text{kN} \tag{3.58}$$

Um die Bedingungen der Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung nicht zu verletzen, darf die ausgeübte Kraft $F$ nicht grösser als ca. 28.7 kN sein. Folglich darf die eingeleitete Kraft $Q$ nicht grösser als ca. 14.35 kN sein.

Die Durchbiegung kann nun mit Hilfe der Biegelinienfunktion Gleichung (3.36) für jede beliebige x-Koordinate des Balkens berechnet werden. Die untenstehende Abb. 3.19 zeigt eine dreidimensionale Funktion. Diese liefert die Durchbiegung, abhängig von Position $x$ und Kraft $F$. Dabei wird die Kraft nicht grösser als zuvor in Gleichung (3.58) berechnet, damit die Bedingungen für die 1. Ordnung erfüllt sind. Mit Hilfe der Farbskala können Durchbiegungswerte abgeschätzt werden. Für eine bessere Übersicht zeigt die Funktion nur Mittelwerte (vgl. 3.3.5).

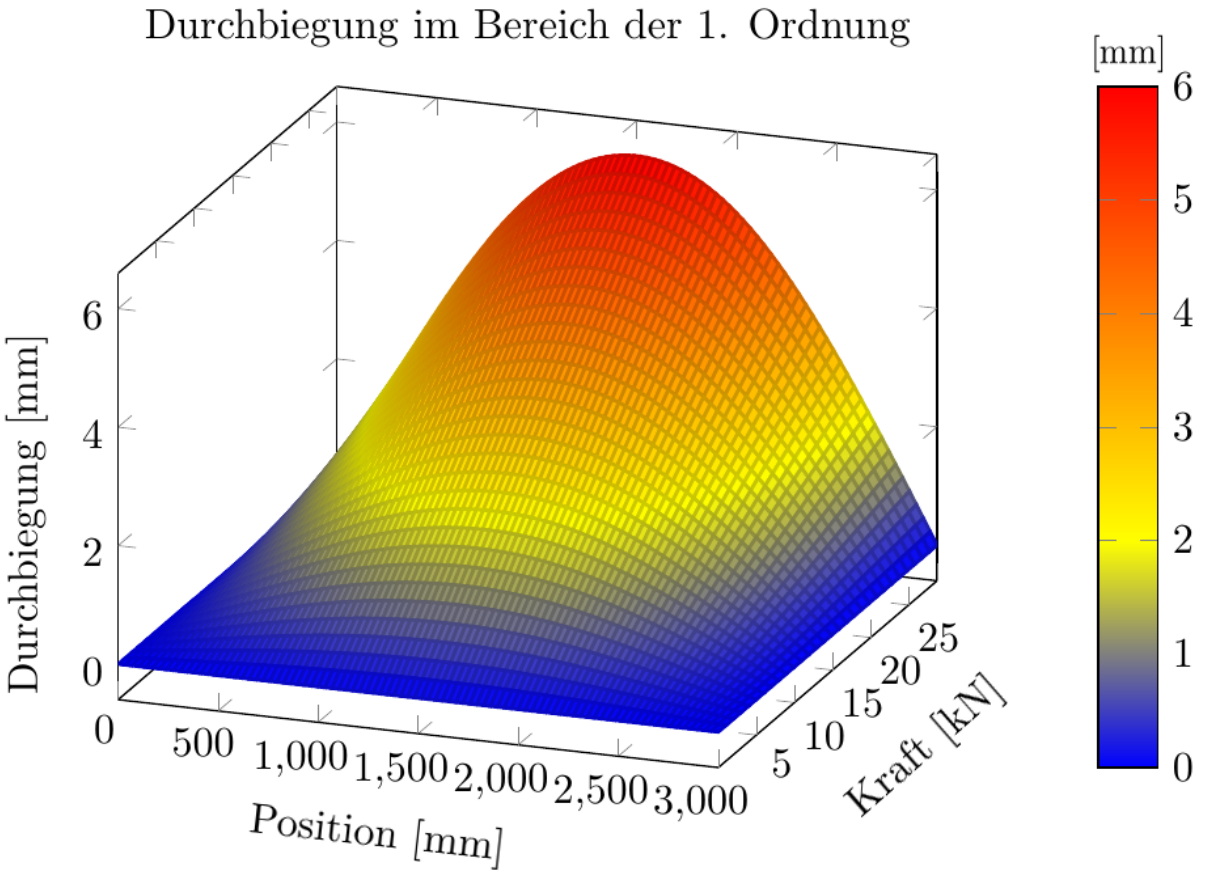



*Abb. 3.19 Durchbiegung im Bereich der 1. Ordnung (3D)*

In der untenstehenden Tabelle 3.5 sind noch spezifische Belastungen in tabellarischer Form aufgelistet. Auch diese Werte sind nur Mittelwerte.

*Tabelle 3.5 Spezifische Durchbiegungswerte zu der dazugehörigen Position und Kraft*

| **Kraft (F)** | **Belastung (Q)** | $w\left(\frac{l-a}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l+a}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 5.000 kN | 2.500 kN | 0.908 mm | 1.044 mm | 0.908 mm |
| 10.000 kN | 5.000 kN | 1.816 mm | 2.089 mm | 1.816 mm |
| 15.000 kN | 7.500 kN | 2.725 mm | 3.133 mm | 2.725 mm |
| 20.000 kN | 10.000 kN | 3.633 mm | 4.178 mm | 3.633 mm |
| 25.000 kN | 12.500 kN | 4.541 mm | 5.222 mm | 4.541 mm |
| 28.725 kN | 14.362 kN | 5.217 mm | 6.000 mm | 5.217 mm |

### 3.3.5 Fehlerrechnung

Des Weiteren muss die Fehlerrechnung für die einzelnen Variablen durchgeführt werden. Grundsätzlich hat nur das Elastizitätsmodul $E$ einen Fehler, da alle anderen Werte in der Theorie-Rechnung als exakt angesehen werden. Da jedoch diese Werte anschliessend mit den experimentellen Werten verglichen werden, wird für die Variablen $l$, $a$ und $x$ ein maximaler Fehler angenommen.

Bevor aber der Fehler für die Durchbiegung berechnet werden kann, muss beachtet werden, dass die Variable $E$ eine Standartabweichung als Fehler hat und bei den anderen Variablen lediglich ein maximaler Fehler vorliegt. Die Standartabweichung muss somit zu einem maximalen Fehler werden. Dafür kann sich die Definition des maximalen Fehlers und die Gauss'sche Verteilung zunutze gemacht werden. Der maximale Fehler gibt das Konfidenzintervall an, in welchem die Messung mit 100 % Wahrscheinlichkeit liegen wird. Die Standartabweichung gibt das Konfidenzintervall an, indem die nächste Messung mit 68.3 % Wahrscheinlichkeit liegt. Die Wahrscheinlichkeit wird dabei mit Hilfe der Funktion der Gauss'schen Normalverteilung berechnet (Gleichung (3.59)).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \tag{3.59}$$

Die Fläche unterhalb der Kurve gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die nächste Messung in diesem Bereich liegen wird und wird wie folgt berechnet:

$$p = \int_{\bar{x}-z\sigma}^{\bar{x}+z\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx \tag{3.60}$$

Die Variable $z$ in Gleichung (3.60) kann dabei frei gewählt werden. Grundsätzlich gilt, dass die Standartabweichung $\sigma$ (keine Spannung) so klein wie möglich sein sollte, sodass $z$ so gross wie möglich gewählt werden kann. Diese Möglichkeit der Vervielfachung der Standartabweichung kann nun verwendet werden, um aus der Standartabweichung (Abb. 3.20) näherungsweise einen maximalen Fehler zu machen. Dafür wird angenommen, dass der maximale Fehler etwa drei Standartabweichungen entspricht [21, S. 40]. Diese Annahme darf getroffen werden, da die Wahrscheinlichkeit bei drei Standartabweichungen bereits bei 99.7 % liegt (Abb. 3.21).

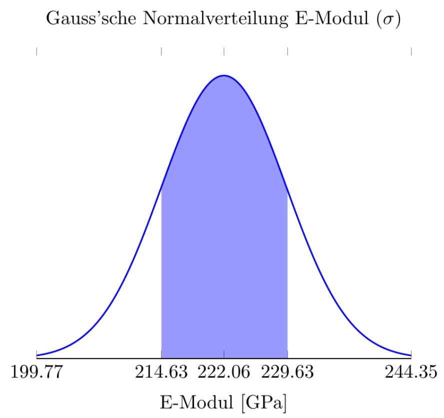



*Abb. 3.20 Gauss'sche Normalverteilung mit z=1*

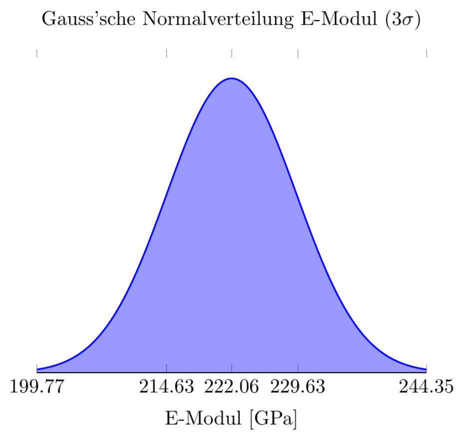



*Abb. 3.21 Gauss'sche Normalverteilung mit z=3*

Die Fehlerfortpflanzung für maximale Fehler kann mit dem Aufaddieren der einzelnen Fehler, welche mit der partiellen Ableitung multipliziert wurden, berechnet werden. Wie auf der vorherigen Seite erwähnt, wird für das E-Modul ein maximaler Fehler von 22.29 GPa verwendet.

$$\Delta w = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y + ... \tag{3.61}$$

Die Gleichung für den Fehler der Durchbiegung $w$ sieht somit wie folgt aus:

$$\Delta w = \left|\frac{\partial w}{\partial E}\right| \cdot \Delta E + \left|\frac{\partial w}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial w}{\partial l}\right| \cdot \Delta l + \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| \cdot \Delta x + \left|\frac{\partial w}{\partial F}\right| \cdot \Delta F + \left|\frac{\partial w}{\partial I_y}\right| \cdot \Delta I_y \tag{3.62}$$

$$\Delta E = 22.29\,\text{GPa},\ \Delta a = 2\,\text{mm},\ \Delta l = 2\,\text{mm},\ \Delta x = 2\,\text{mm},\ \Delta F = 0\ \text{N},\ \Delta I_y = 0\ \text{mm}^4$$

Es ist zu erkennen, dass der absolute Fehler nicht konstant ist, sondern abhängig von den variablen Grösse $F$ und $x$ ist. Somit muss der Fehler in ähnlichem Stil wie die Durchbiegung selbst in einem dreidimensionalen Diagramm dargestellt werden.

Der Fehler für die Durchbiegung kann mit Hilfe der in Gleichung (3.62) beschriebenen Fehlerfortpflanzung beschrieben werden. Der Fehler kann im gleichen Koordinatensystem wie in Abb. 3.19 dargestellt werden:

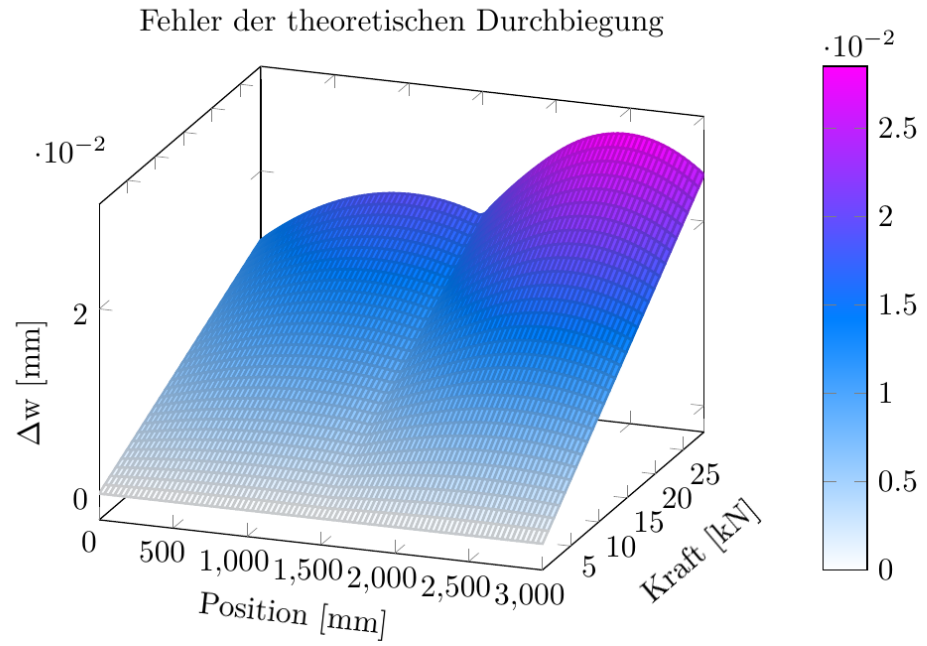



*Abb. 3.22 Fehler der theoretischen Durchbiegung nach Gauss'scher Fehlerfortpflanzung*

Es ist in Abb. 3.22 zu erkennen, dass der Fehler im Bereich von $10^{-2}$ mm liegt und somit grundsätzlich nicht vernachlässigbar ist. Es wird aber bereits vorweggenommen, dass die experimentellen Werte deutlich von den theoretischen Werten abweichen. Deshalb wird auch im weiteren Verlauf bei Vergleichen oder Darstellungen kein Fehler angegeben, da dies keinen Mehrwert für die Verständlichkeit und das Ziel dieser Arbeit bringt. Die Fehlerfunktion hat keinen ähnlichen Verlauf, wie die Durchbiegungsfunktion, wodurch der relative Fehler sehr variabel ist. Bei den beiden Auflagern kommt es dazu, dass $\Delta w / w \to \infty$. Da aber in dieser Arbeit vor allem die Durchbiegungen interessant sind, welche nicht an den Auflagern liegen, wird nicht weiter darauf eingegangen.

Für eine Referenz wird zusätzlich die Durchbiegung noch mit einem E-Modul von 210.00 GPa berechnet [22]. Die untenstehende Tabelle 3.6 liefert den Vergleich der Durchbiegung mit gemessenem und theoretischem E-Modul. Die Indizes geben an, welcher Wert verwendet wurde.

*Tabelle 3.6 Vergleichstabelle der Durchbiegungen mit verschiedenen E-Modulen*

| **Kraft (F)** | $w\left(\frac{l \pm a}{2}\right)$ **$E_{222.06}$** | $w\left(\frac{l \pm a}{2}\right)$ **$E_{210.00}$** | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ **$E_{222.06}$** | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ **$E_{210.00}$** |
|---|---|---|---|---|
| 5.000 kN | 0.908 mm | 0.960 mm | 1.044 mm | 1.104 mm |
| 10.000 kN | 1.816 mm | 1.921 mm | 2.089 mm | 2.209 mm |
| 15.000 kN | 2.725 mm | 2.881 mm | 3.133 mm | 3.313 mm |
| 20.000 kN | 3.633 mm | 3.841 mm | 4.178 mm | 4.418 mm |
| 25.000 kN | 4.541 mm | 4.802 mm | 5.222 mm | 5.522 mm |
| 28.725 kN | 5.217 mm | 5.517 mm | 6.000 mm | 6.345 mm |

Die Zunahme der Durchbiegung im Vergleich zum $E_{222.06}$ beträgt aufgrund des linearen Einflusses des Elastizitätsmoduls in der Biegelinienfunktion (3.36) konstant 5.744 %. Aus der untenstehenden Abb. 3.23 kann die Durchbiegungslinie verglichen werden. Die durchgezogene Linie repräsentiert dabei die Durchbiegung mit dem gemessenen Elastizitätsmodul $E_{222.06}$. Die blaue Linie stellt die Durchbiegung mit dem theoretischen E-Modul von 210.00 GPa dar. Die roten Linien sind die beiden Durchbiegungen berechnet mit dem gemessenen E-Modul plus und minus des maximalen Fehlers von 22.29 GPa.

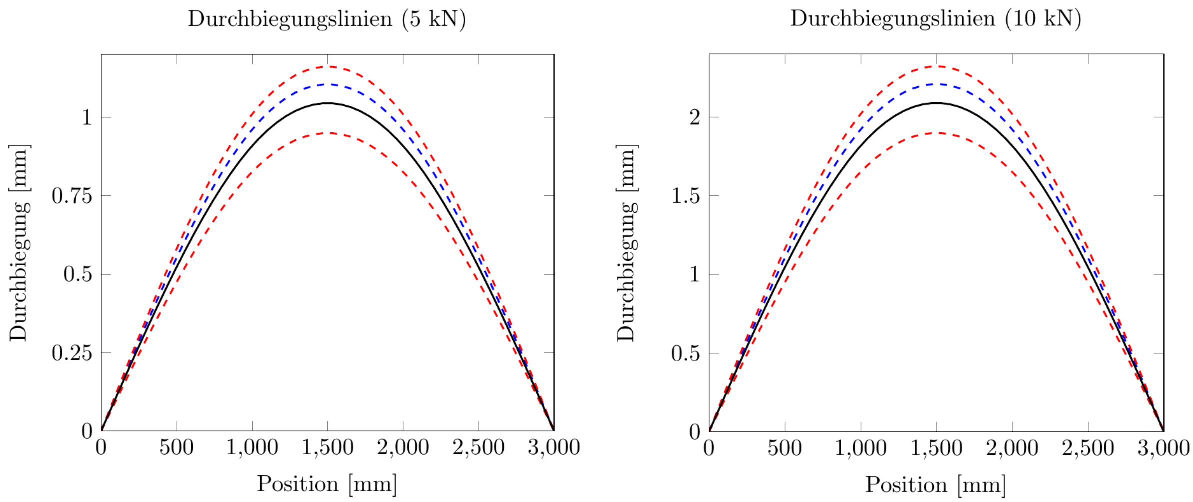



*Abb. 3.23 Biegelinien mit unterschiedlichen E-Modulen bei 5* kN *und 10* kN

### 3.3.6 Balkendurchbiegung ausserhalb der 1. Ordnung

In diesem Abschnitt wird gleiches wie im vorherigen Abschnitt gemacht, mit dem Unterschied, dass die Kraft nun so gross ist, dass die Durchbiegung grösser ist als die Bedingung der Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung. Zusätzlich wird der Balken von einer elastischen Verformung hin zu einer plastischen Verformung[7] übergehen. Dies wird aber alles nicht beachtet in der Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung.

Dieser Übergang zwischen elastischem und plastischem Bereich kann mit Hilfe des Spannungs-Dehnungsdiagrams und Gleichung (3.17) approximativ bestimmt werden. Formt man Gleichung (3.17) nach dem Moment um, so kann das maximale Moment mit Gleichung (3.63) berechnet werden, damit der Balken im elastischen Bereich bleibt.

$$M_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{a_{\max}} \cdot I_y \qquad [\text{Nmm}] \tag{3.63}$$

Aus der Werkstoffprüfung ist bekannt, dass die obere Streckgrenze $R_{eH}$ bei 363.06 MPa liegt. Zusammen mit der Gleichung (3.27) kann so die maximale Kraft berechnet werden in Gleichung (3.64):

$$F_{elastisch,\max} = \frac{4M_{\max}}{l-a} \approx \frac{4 \cdot 56398502.19\,\text{Nmm}}{2000\,\text{mm}} \approx 112'797.00\,\text{N} \tag{3.64}$$

Die Werte dürfen nicht als exakte Werte angesehen werden, um zu entscheiden, ob man sich im elastischen oder plastischen Bereich befindet, da der Übergang in der realen Welt fliessend ist und nicht mehr mit dem elastischen Widerstandsmodul, sondern mit dem plastischen Widerstandsmodul gearbeitet wird. Deshalb können die 112.8 kN für die maximale Kraft nur als Näherung angenommen werden.

[7] «*Bei der plastischen Verformung kehrt ein Bauteil nicht wieder zu 100% in die ursprüngliche Form zurück – man spricht hier auch von der Formänderung. Ein Teil der Verformung ist nach wie vor elastisch und somit reversibel, nur ein bestimmter Teil ist plastisch und bleibt dauerhaft bestehen.*»[23]

Die Durchbiegung wird auch hier wieder mit Hilfe der Biegelinienfunktion (Gleichung (3.36)) für jede beliebige x-Koordinate des Balkens berechnet. Die untenstehende Abb. 3.24 zeigt die dreidimensionale Kurve, die die Durchbiegung für jede Position und Kraft beschreibt. Mit Hilfe der Farbskala können Durchbiegungswerte abgeschätzt werden.

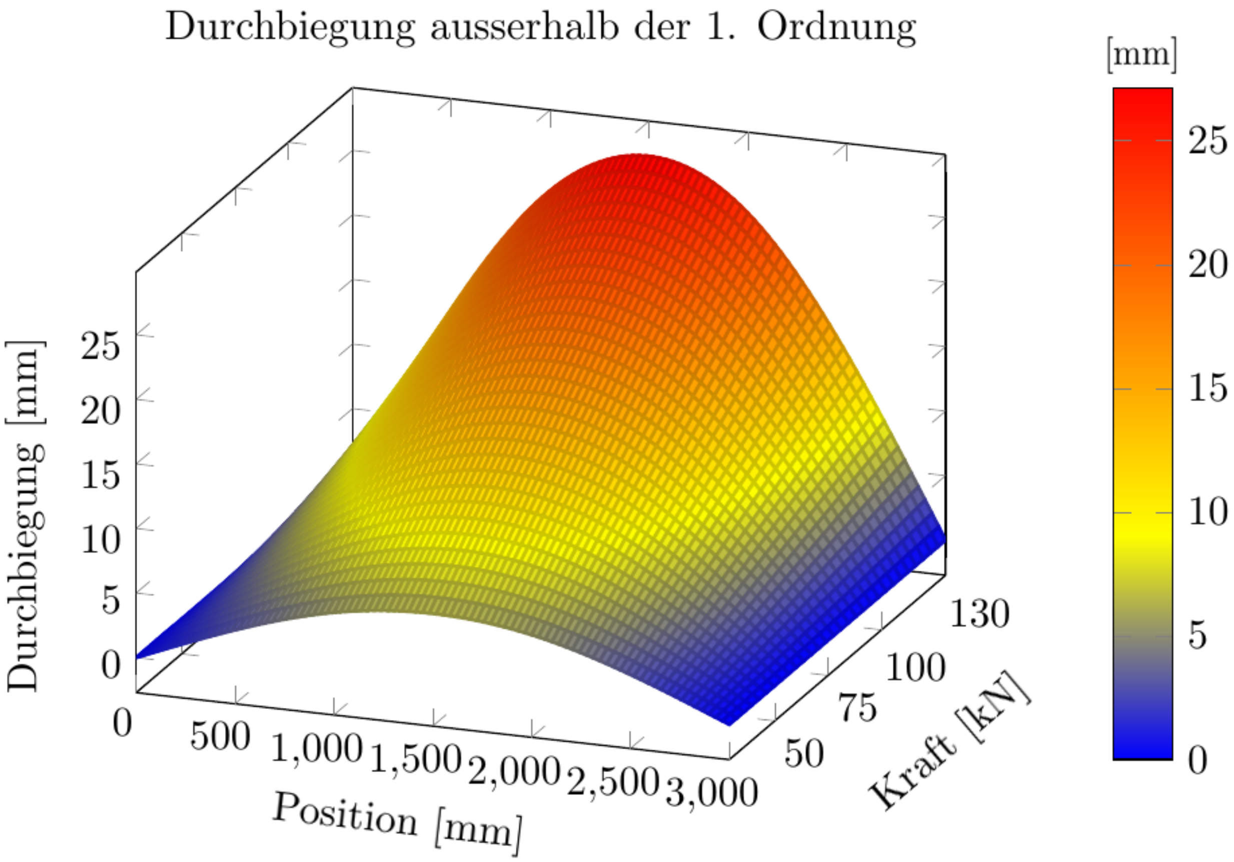



*Abb. 3.24 Durchbiegung ausserhalb des Bereichs der 1. Ordnung (3D)*

In der untenstehenden Tabelle 3.7 sind noch spezifische Belastungen in tabellarischer Form aufgelistet. Die Fehler sind hier wieder genau gleich klein, wie im vorherigen Abschnitt und werden deshalb vernachlässigt.

*Tabelle 3.7 Spezifische Durchbiegungswerte zu der dazugehörigen Position und Kraft*

| **Kraft (F)** | **Belastung (Q)** | $w\left(\frac{l-a}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l+a}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 28.725 kN | 14.362 kN | 5.217 mm | 6.000 mm | 5.217 mm |
| 50.000 kN | 25.000 kN | 9.082 mm | 10.444 mm | 9.082 mm |
| 75.000 kN | 37.500 kN | 13.623 mm | 15.666 mm | 13.623 mm |
| 100.000 kN | 50.000 kN | 18.164 mm | 20.888 mm | 18.164 mm |
| 112.797 kN | 56.399 kN | 20.488 mm | 23.561 mm | 20.488 mm |
| 130.000 kN | 65.000 kN | 23.613 mm | 27.155 mm | 23.613 mm |

### 3.3.7 Berechnung der Durchbiegung mittels Prinzip der virtuellen Kräfte

Da beim Prinzip der virtuellen Kräfte nicht eine gesamthafte Funktion für die Durchbiegung liefert, sondern lediglich die Durchbiegung an einer bestimmten Position, wird hier demonstrationsweise die Durchbiegung an der Position *l/2* bei einer Kraft von $F$ = 10'000 kN berechnet.

In der Gleichung (3.45) kann das Elastizitätsmodul und das Flächenträgheitsmoment, aufgrund der Unabhängigkeit von der Position, aus dem Integral gezogen werden. Da die Momentfunktionen unterschiedliche Definitionsbereiche haben, wird nachfolgend zuerst das reale Moment mit dem virtuellen Moment verrechnet:

$$M \cdot \overline{M} = \begin{cases} \frac{F}{4} x^2 & x \in \left[0; \frac{l-a}{2}\right] \\ \frac{F}{8}(l-a)x & x \in \left[\frac{l-a}{2}; \frac{l}{2}\right] \\ \frac{F}{8}(l-a)(l-x) & x \in \left[\frac{l}{2}; \frac{l+a}{2}\right] \\ \frac{F}{4}(l-x)^2 & x \in \left[\frac{l+a}{2}; l\right] \end{cases} \tag{3.65}$$

Nun kann die Gleichung (3.65) in das aus Gleichung (3.45) stammende Integral eingesetzt werden. Aufgrund der Symmetrie in diesem Beispiel muss nur bis *l/2* integriert werden und anschliessend eine Verdopplung vorgenommen werden. Durch Einsetzen der Parameter erhält man somit für das Integral:

$$2 \cdot \int_0^{l/2} M \cdot \overline{M}\, dx = 2 \cdot \left( \left[ \frac{F}{12} x^3 \right]_0^{1000} + \left[ \frac{F}{16}(l-a)x^2 \right]_{1000}^{1500} \right) = 4.791\overline{6} \cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^3 \tag{3.66}$$

Eingesetzt in die Gleichung (3.45) und ausgerechnet, ergibt sich für die Durchbiegung:

$$w = \frac{1}{EI} \cdot 4.791\overline{6} \cdot 10^{12} \cdot 10^9\ \text{Nmm}^3 = 2.089\,\text{mm} \tag{3.67}$$

Eine erneute Tabelle mit einzelnen Durchbiegungen wie im vorherigen Abschnitt ist überflüssig, da die Durchbiegungswerte exakt dieselben sein werden. Grund dafür ist, dass für beide Ausgangslagen (Differentialgleichung und Arbeitssatz) dieselben Modellannahmen getroffen wurden und somit die eine Gleichung die mechanische Gleichung und die andere die energetische Gleichung darstellt.

## 3.4 Experiment

### 3.4.1 Messgeräte

Um die Durchbiegung des Balkens zu messen, wurden sogenannte induktive Messtaster (Abb. 3.25) verwendet. Die Messtaster haben eine Messgenauigkeit von 0.1 µm und einen maximalen Laufweg von 40 mm. Insgesamt waren acht solcher Messtaster im Einsatz. Zusätzlich wurde mit einem Feinspannungs-Messgerät (Abb. 3.26) vereinzelt die Spannung in der Mitte des unteren Flanschs gemessen. Diese Datenmenge ist jedoch so klein und nicht konstant gehalten, dass sie nicht in die Arbeit eingebaut wird.

*Abb. 3.25 Induktiver Messtaster (Messbereich 40 mm)*

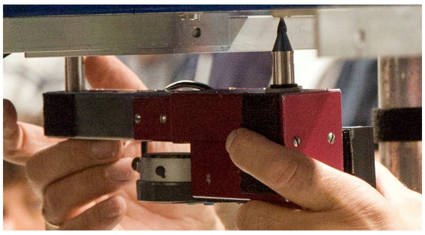


*Abb. 3.26 Feinspannungsmessgerät ©HSLU*

### 3.4.2 Aufbau

Der Stahlträger wurde, wie in Abb. 3.27 zu sehen, in der Versuchsanlage installiert. Dabei wurde darauf geachtet, dass der Balken mittig positioniert war und eine freitragende Spannweite von 3000 mm aufwies. Gleiches galt für die beiden Lasteinleitungspunkte, welche so positioniert wurden, dass sie jeweils 500 mm links und rechts vom Balkenmittelpunkt waren. Um ein mögliches Versagen durch Knicke an den Auflage- und Einleitpunkten zu verhindern, musste jeweils eine 120 mm lange Metallplatte (Abb. 3.28 und Abb. 3.29) unterlegt werden. An den beiden Auflagern wurde den Rollen ein Bewegungsraum von ca. 7 mm gegeben (Abb. 3.29), damit der Balken keine unnötigen Spannungskräfte auf die Konstruktion ausübte.

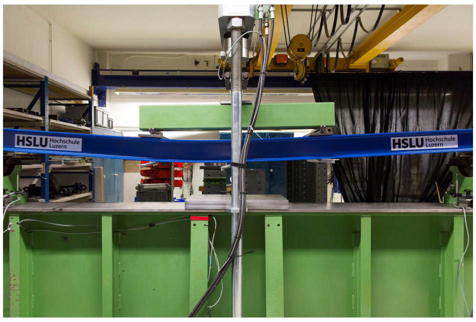



*Abb. 3.27 Versuchsaufbau Vierpunktbelastung ©HSLU*

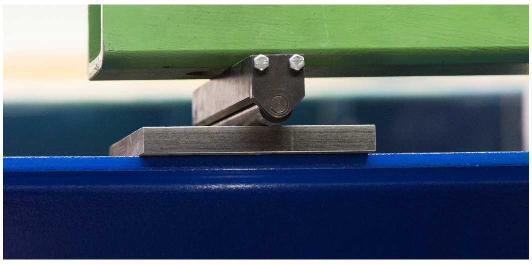


*Abb. 3.28 Lasteinleitungspunkt mit Metallplatte ©HSLU*

*Abb. 3.29 Auflager mit Metallplatte*

Die insgesamt acht Messtaster wurden an insgesamt fünf verschiedenen Punkten angebracht. Je ein Messtaster wurde mittig unter dem Balken und 200 mm von den Auflagern entfernt positioniert. Um mögliche Torsionen auszugleichen, wurden anschliessend unterhalb der Lasteinleitpunkte je zwei Messtaster links und rechts positioniert. Diese mussten je gut 250 mm von der Balkenlängsachse entfernt positioniert werden. Damit die Verformung trotzdem genau gemessen werden konnte, musste wie in Abb. 3.30 links, eine Konstruktion angebracht werden, die es erlaubte, die Verformung senkrecht über den Messtastern zu messen. Die letzten beiden Messtaster wurden auf die gleiche Art und Weise, wie die vier zuvor beschriebenen Messtaster, positioniert. Einziger Unterschied war, dass die Metallkonstruktion nicht senkrecht zur Balkenlängsachse ausgerichtet werden konnte (Abb. 3.30 rechts). Die Konstruktion sollte, vor allem im elastischen Bereich, keine einflussreichen Messfehler verursachen, da die Konstruktion tangential an den Balken angebracht war. Die Messtaster wurden mit Draht verbunden, der eine geringe Elastizität und einen geringen Wärmeausdehnungskoeffizienten hat, um die Fehleranfälligkeit zu verringern. Die Verbindung wurde per Kabel zwischen Messtaster und Laptop, welcher die Messresultate zusammentrug und aufzeichnete, hergestellt.

*Abb. 3.30 Aluminiumstreben für die Befestigung der Messtaster*

### 3.4.3 Durchführung

Bevor der Balken belastet wurde, wurden alle Messtaster nochmals auf ihre Position überprüft und kalibriert, um einen Startmesswert von 0.00 mm aufzuweisen. Anschliessend wurde die Maschine in Betrieb genommen und ausgehend von 0.00 kN stetig die Kraft erhöht, die auf den Balken wirkte. Dabei wurde darauf geachtet, dass die Kraftschritte nicht zu gross sind. Um die Messdaten auf ihre Korrektheit zu überprüfen, wurde mit dem Erhöhen der Kraft kurz gestoppt und von Hand die Durchbiegung überprüft. Die Kraft wurde danach weiter erhöht, bis der Bereich erreicht wurde, in dem der Übergang vom elastischen zum plastischen Verformen begann, welcher auf ca. 105 kN geschätzt wurde. Als die Kraft in die Nähe der kritischen Kraft kam, die der Balken erwartungsweise im elastischen Bereich aushält, musste festgestellt werden, dass der Balken bereits eine grössere Scherbewegung gemacht hatte. Da der Balken keine fixe Befestigung besass, musste der Versuch aufgrund der Sicherheitsgefährdung abgebrochen werden. Damit sollte ein plötzliches Ausbrechen aus den Auflagern des Balkens verhindert werden.

Weitere Bilder zum Aufbau und Experiment sind im Anhang 7.9 ersichtlich.

### 3.4.4 Resultate im Bereich der 1. Ordnung

Die erhaltenen Messdaten werden im Anhang 7.5 vollständig aufgelistet. In der untenstehenden Tabelle sind lediglich ausgewählte Belastungen aufgelistet. Diese gehen bis zur maximal zulässigen Belastung von $F_{max} = 28.725\,\text{kN}$ für die 1. Ordnung. Die Kraft $F$ gibt dabei den Wert an, der die Maschine aufgebracht hat und die Belastung Q die Kraft, die an $(l \pm a)/2$ auf den Balken ausgeübt wurde. Q entspricht damit $F/2$.

*Tabelle 3.8 Auswahl der Durchbiegungsergebnisse des Vierpunktbelastungsversuches im Bereich der 1. Ordnung*

| **Kraft (F)** | **Belastung (Q)** | $w\left(\frac{l-a}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l+a}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 5.086 kN | 2.543 kN | 1.164 mm | 1.319 mm | 1.166 mm |
| 9.989 kN | 4.995 kN | 2.291 mm | 2.605 mm | 2.287 mm |
| 14.999 kN | 7.500 kN | 3.421 mm | 3.901 mm | 3.435 mm |
| 19.971 kN | 9.986 kN | 4.538 mm | 5.185 mm | 4.546 mm |
| 24.960 kN | 12.480 kN | 5.657 mm | 6.472 mm | 5.673 mm |
| 28.686 kN | 14.343 kN | 6.492 mm | 7.435 mm | 6.512 mm |

Die untenstehenden Abb. 3.31 und Abb. 3.32 stellen alle gemessenen Messpunkte in diesem Bereich dar, für die verschiedenen Positionen der Messtaster. Es ist zu beachten, dass die Durchbiegungen, die an den Positionen 200 mm und 2800 mm sowie an den Positionen 1000 mm und 2000 mm gemessen wurden, sehr ähnliche oder gleiche Werte aufweisen und so in Abb. 3.32 kaum zu unterscheiden sind.

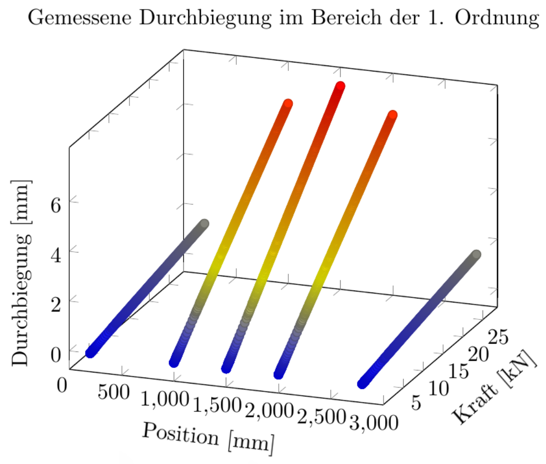



*Abb. 3.31 Gemessene Durchbiegung an verschiedenen Positionen (3D)*

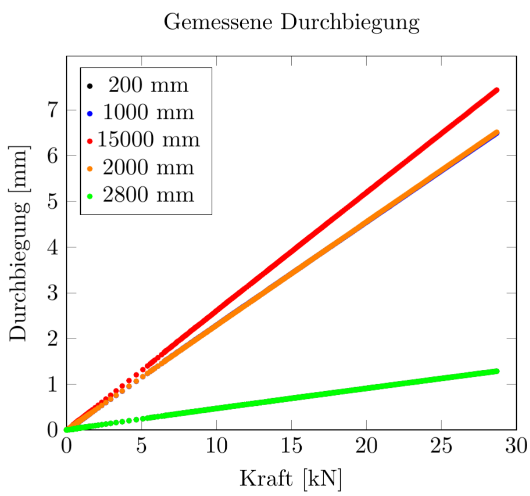



*Abb. 3.32 Gemessene Durchbiegungen an verschiedenen Positionen (2D)*

### 3.4.5 Resultate im Bereich ausserhalb der 1. Ordnung

Mit den Messdaten für Belastungen, die ausserhalb der 1. Ordnung der Euler-Bernoulli-Balkentheorie liegen, kann genau gleich verfahren werden, wie im vorherigen Abschnitt 3.4.4. Dabei werden wieder zuerst einzelne Messdaten in der nachfolgenden Tabelle 3.9 aufgelistet.

*Tabelle 3.9 Auswahl der Durchbiegungsergebnisse des Vierpunktbelastungsversuches ausserhalb des Bereichs der 1. Ordnung*

| **Kraft (F)** | **Belastung (Q)** | $w\left(\frac{l-a}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ | $w\left(\frac{l+a}{2}\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| 28.686 kN | 14.343 kN | 6.492 mm | 7.435 mm | 6.512 mm |
| 50.023 kN | 25.011 kN | 11.115 mm | 12.779 mm | 11.139 mm |
| 75.030 kN | 37.515 kN | 16.448 mm | 18.939 mm | 16.552 mm |
| 100.023 kN | 50.011 kN | 22.159 mm | 25.570 mm | 22.284 mm |
| 108.970 kN | 54.485 kN | 33.405 mm | 38.192 mm | 32.628 mm |
| 108.600 kN | 54.300 kN | 37.988 mm | 41.094 mm | 36.635 mm |

Die maximale Kraft, die vor Versuchsabbruch gemessen wurde, lag bei 109.821 kN, wobei bei der Position $l/2$ eine gemittelte Durchbiegung von ca. 52 mm gemessen wurde. Zu beachten ist aber, dass aufgrund des seitlichen Ausscherens des Balkens die Messergebnisse nur bis zu den 108.970 kN beziehungsweise 108.600 kN von der obigen Tabelle genau sind. Auch hier werden die gesamten Messergebnisse in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Einmal in der dreidimensionalen Ansicht Abb. 3.33 und einmal zweidimensional Abb. 3.34.

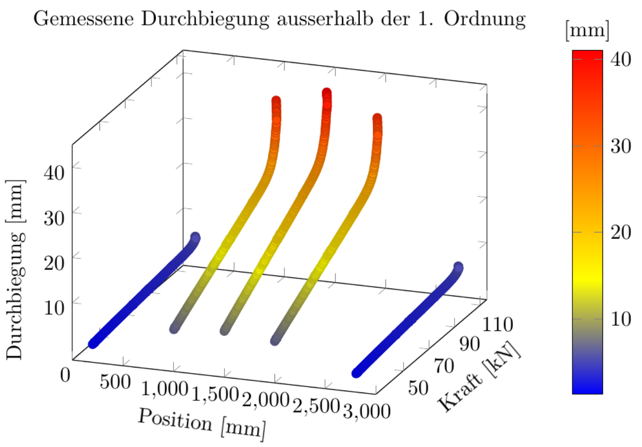



*Abb. 3.33 Gemessene Durchbiegung verschiedener Positionen ausserhalb 1. Ordnung (3D)*

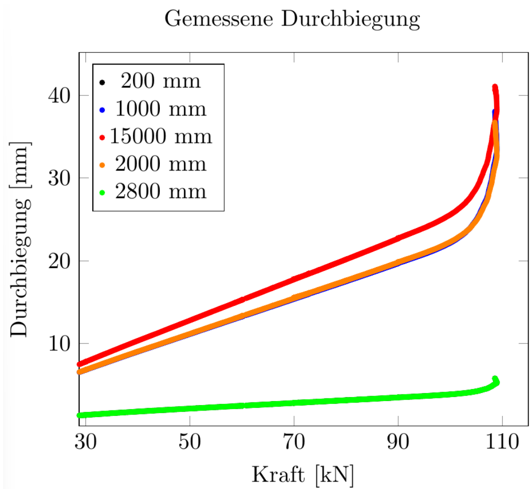



*Abb. 3.34 Gemessene Durchbiegung verschiedener Positionen ausserhalb 1. Ordnung (2D)*

### 3.4.6 Fehleranalyse

Bei Messungen können immer Ungenauigkeiten auftreten. Dabei wird unterschieden in systematische und zufällige Messfehler. Systematische Messfehler sind Fehler, welche durch vermeidbare Fehler verursacht werden. Dazu gehört zum Beispiel falsches Justieren der Messgeräte. Im Gegensatz dazu entstehen zufällige Messfehler immer. Dadurch kann grundsätzlich nur ein Bereich angegeben werden, in welchem sich der korrekte Wert mit grösserer Wahrscheinlichkeit befindet.

**Systematische Messfehler**

Vor dem Versuch wurde darauf geachtet, alle Messgeräte korrekt auf ihre Ausgangswerte zu justieren, um Messfehler zu vermeiden. Es muss aber darauf hingewiesen werden, dass beim analogen Nachmessen zur Überprüfung ein Draht berührt wurde, was zu einer Verschiebung des Messtasters führte. Da die Berührung jedoch im elastischen Bereich des Balkens stattgefunden hatte, konnte der Fehler durch Fortführen des linearen Trends der Fehler auskorrigiert werden. Im Anhang 7.6 ist ein Durchbiegungsdiagramm ohne Korrektur zu sehen.

Durch eine Trendanalyse der linearen Zunahme konnte eine Gleichung für die Trendlinie bestimmt werden, die ein bestimmtheitsmass von 0.9999199 aufweist:

$$y = 0.25074x + 0.208288 \tag{3.68}$$

Um die Differenz der Verschiebung zu erhalten, wurden anschliessend die nächsten 1000 gemessenen Werte mit dem Wert der Gleichung (3.68) verglichen und die Differenz gemittelt.

$$\Delta w_f = \left[3.5605 \pm 0.01406\right]\text{mm} \tag{3.69}$$

Die Standartabweichung wird nicht weiter beachtet, da für den späteren Vergleich mit den theoretisch berechneten Werten bekannt ist, dass diese deutlich grössere Abweichungen aufweisen werden, als die hier angegebene Standartabweichung.

**Zufällige Messfehler**

Die Messtaster besitzen eine Auflösung von $10^{-12}$ nm. Da die Durchbiegung zu einer dazugehörigen Kraft nur jeweils einmal gemessen wurde, gibt es einen maximalen Fehler, der als relativer Fehler angegeben werden kann:

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{10^{-12}\,\text{nm}}{w} \rightarrow 0 \tag{3.70}$$

Es ist dabei in Gleichung (3.70) zu erkennen, dass der relative Fehler nahe bei Null liegt und mit Zunahme der gemessenen Durchbiegung $w$ gegen Null läuft. Aus diesem Grund wird der Fehler vernachlässigt.

Eine andere Ungenauigkeit ist die Position $x$ der Messtaster. Es wird in dieser Arbeit angenommen, dass die Messtaster $\pm 2\,\text{mm}$ genau ausgerichtet sind. Aber auch diese Ungenauigkeit beeinflusst die Ergebnisse der Durchbiegung bei kleinen Kräften ($F$ < 28.725 kN) nur im Bereich von $10^{-4}$ mm. Auch bei grösseren Kräften, grösser als die gerade genannte, ist der Einfluss immer noch vernachlässigbar klein.

### 3.4.7 Biegelinie näherungsweise bestimmen

Während des Experiments wurden lediglich fünf Punkte ausgewählt, an denen die Durchbiegung *w* gemessen wurde. Um später im Vergleich die theoretische Biegelinie besser mit den Resultaten vergleichen zu können, wird die Biegelinie des Balkens im Experiment benötigt. Dazu wird mit Hilfe von *Excel* die polynomiale Regressionsgeraden 6. Grades berechnet. Anhand dieser Gleichungen kann die Biegelinie sehr genau angenähert werden. Das Bestimmtheitsmass der näherungsweise bestimmten Gleichungen ist immer grösser als 99.9 %.

Auf der Abb. 3.32 in Abschnitt 3.4.4 sind die Messpunkte für 200 mm, $l/2$, $(l \pm a)/2$ und 2800 mm abzulesen, wobei bereits visuell die Annahme einer proportionalen beziehungsweise linearen Zunahme im elastischen Bereich vermutet werden darf. Diese Annahme kann mit Hilfe der linearen Regressionsgerade (Gleichung (3.68)) aus Abschnitt 3.4.6 bestätigt werden. Aus diesem Grund ist es möglich, die dreidimensionale Biegelinienfunktion näherungsweise zu bestimmen. Dafür wird die polynomiale Regressionsgerade für einen beliebigen Messdatensatz berechnet und kann anschliessend durch die Proportionalität der Durchbiegung zur Kraft für jede beliebige Kraft im Bereich der 1. Ordnung berechnet werden. Das Ergebnis ist in der untenstehenden Abb. 3.35 zu sehen.

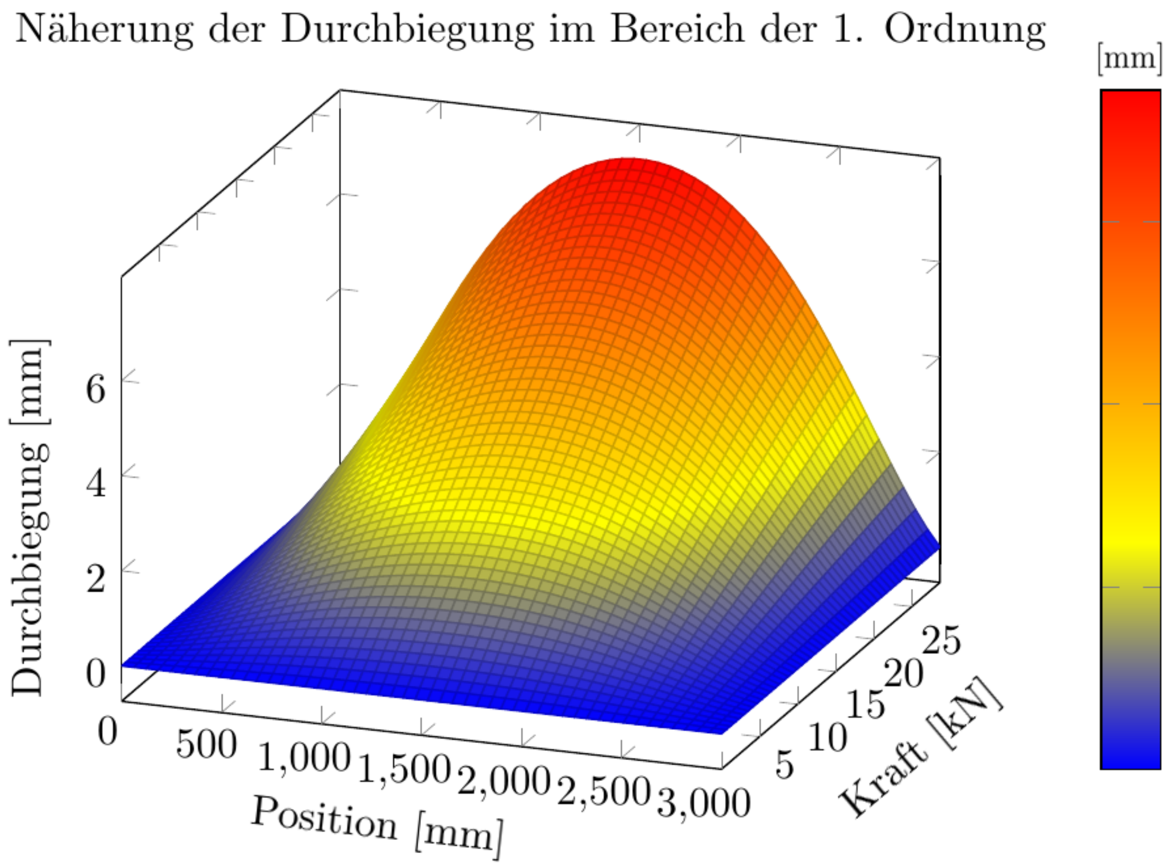



*Abb. 3.35 Näherung der tatsächlichen Biegelinie*

Es werden keine Fehler angegeben, da diese sehr klein sind und aufgrund der Abweichung zwischen Theorie und Experiment, die jetzt bereits zu erkennen ist, keinen Mehrwert für den Vergleich bieten.

## 3.5 Diskussion und Vergleich

Wie bereits mehrmals erwähnt und aufgezeigt, sind die Fehler sehr klein und werden deshalb in diesem Abschnitt grundsätzlich nicht dargestellt. Weiter wird in diesem Abschnitt ein Vergleich gezogen zwischen den theoretischen Ergebnissen aus Abschnitt 3.2 und den gemessenen Ergebnissen aus Abschnitt 3.4.

### 3.5.1 Hypothesen der 1. Ordnung

Bevor die Durchbiegungsresultate verglichen werden, können die aus Abschnitt 3.1.2 stammenden Annahmen aufgearbeitet und auf ihre Korrektheit überprüft werden. Die ersten Annahmen sind relativ einfach zu überprüfen. Beginnend damit, dass der Balken deutlich länger als seine Querschnittsabmessung sein sollte. Als Faustregel gilt, dass der Balken mindestens 5-mal länger als die Höhe und Breite sein muss. Diese Bedingung ist erfüllt, da der Balken 3300 mm, davon 3000 mm freitragend, lang ist. Somit ist er gut um das 21-fache länger als breit und ebenfalls gut 23-mal länger als hoch. Der Balken ist somit als schlank anzusehen. Die Bemassungen sind in Abschnitt 3.3.1 zu finden.

Die Annahme eines Schubstarren Balkens und das damit gerade bleiben der Querschnittsfläche kommt grundsätzlich in der Realität nie vor. Darf aber bei kleinen Verformungen als Näherung angenommen werden. Das Ausscheren konnte deutlich am Ende des Experimentes beobachtet werden, was auf die Schubkräfte zurückzuführen ist, welche bei den Verbiegungen ausserhalb der 1. Ordnung einen grösseren Einfluss nehmen.

Ein gerader, sowie torsionsfreier Balken war ebenfalls gegeben, da die Kraft senkrecht zur x-y-Ebene und durch die Schwerelinie wirkt. So fand die Durchbiegung im elastischen Bereich nur in Richtung der z-Achse statt. Und da kein Moment um die x-Achse wirkte, gab es keine Torsion.

Stahl hat grundsätzlich ein isotropes Materialverhalten, was bedeutet, seine mechanischen Eigenschaften sind in allen Raumrichtungen gleichbleibend [24]. Die Inhomogenität im mikroskopischen Bereich hat darauf keinen Einfluss [25]. Das linear-elastische Verhalten konnte in Abschnitt 3.3.2 mit dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm bestätigt werden und daraus das Elastizitätsmodul errechnet werden. Auf das E-Modul wird im nächsten Abschnitt 3.5.2 noch etwas genauer eingegangen.

Da die y-Ebene eine Symmetrieachse des Querschnittes ist, ist folglich das biaxiale Flächenträgheitsmoment $I_{xy}$ gleich Null [14].

### 3.5.2 Variablen der Gleichungen

Als erste Variable, welche die Biegung des Balkens beeinflusst, wird das Elastizitätsmodul mit den Referenzwerten der Theorie verglichen. Aus Abschnitt 3.3.2 ist der Verlauf aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm bekannt, sowie das daraus errechnete Elastizitätsmodul von $[222.06 \pm 7.43]$GPa. Beim visuellen Vergleichen der Diagramme mit dem Referenzdiagramm in Abb. 3.36 aus der Theorie, sehen die Verläufe der Kurve sehr ähnlich aus. Das Material hat sich somit in dieser Hinsicht nach der Theorie verhalten. Nimmt man aber den absoluten Wert und vergleicht ihn mit dem Referenzwert von 210.00 GPa [22], so ist zu erkennen, dass hier der Wert um nicht ganz zwei Standartabweichungen überschätzt wurde. Die Überschätzung kann durch Messfehler in der Materialprüfung entstanden sein. Auch könnte der Stahl der Proben für die Werkstoffprüfung aus unerklärlichen Gründen ein höheres Elastizitätsmodul aufgewiesen haben, als für die Stahlsorte üblich ist. Da die Werkstoffprüfung extern durchgeführt wurde und an und für sich nicht Teil dieser Arbeit war, kann kein Rückschluss auf eine mögliche Fehlerquelle im Experiment geschlossen werden. Insgesamt bedeutet das erhöhte E-Modul, dass der Balken sich weniger gut verbiegen lässt, beziehungsweise eine grössere Kraft notwendig ist, um die mit dem Referenzwert berechnete Durchbiegung zu erhalten.

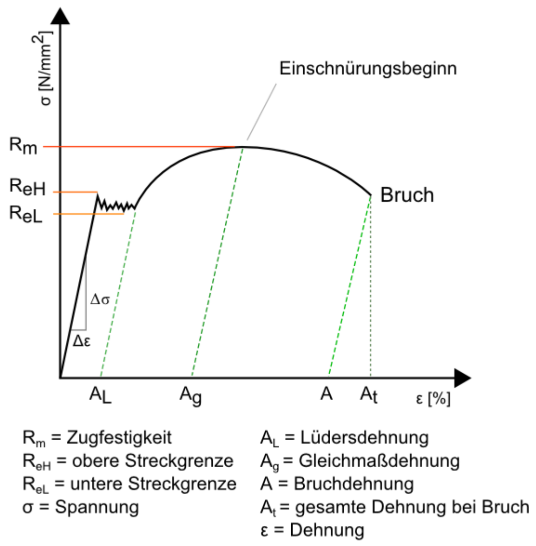



*Abb. 3.36 Spannungs-Dehnungsdiagramm* [12]

Eine weitere Variable, die die Biegung beeinflusst, ist das Flächenträgheitsmoment $I_y$. Der Referenzwert von 1033 $cm^4$ [26] für das Flächenträgheitsmoment konnte in Abschnitt 3.3.3 bestätigt werden. Dies war auch anzunehmen, da für die Bemassungen keine Messungen, sondern die vom Lieferanten angegebenen Masse verwendet wurden. Mehr dazu in Abschnitt 3.5.6. Somit konnte aber trotzdem bestätigt werden, dass die Überlegungen des Autors für die Flächenträgheitsmoment-Berechnung korrekt waren.

Bei den Längen- und Positionsvariablen $l$, $a$ und $x$ wurden keine Messungen durchgeführt, womit ihre Genauigkeit nicht überprüft wurde. Das wäre grundsätzlich eine Verbesserungsmöglichkeit bei der Wiederholung des Experimentes. Es zeigt sich jedoch, dass auch Abweichungen von 2 mm immer noch keinen nennenswerten Einfluss auf die gemessenen Resultate der Durchbiegung ergeben würden.

### 3.5.3 Durchbiegung (1. Ordnung)

Als erstes können die Durchbiegungen für Kräfte kleiner als 28.725 kN verglichen werden. Dazu eine Auflistung ausgewählter Kräfte in der untenstehenden Tabelle 3.10 gegliedert in die theoretisch und experimentell gemessenen Werte.

*Tabelle 3.10 Vergleich theoretische Durchbiegung mit gemessener Durchbiegung*

| **Kraft (F)** | $w\left(\frac{l \pm a}{2}\right)$ **Theorie** | $w\left(\frac{l-a}{2}\right)$ **Experiment** | $w\left(\frac{l+a}{2}\right)$ **Experiment** | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ **Theorie** | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ **Experiment** |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.086 kN | 0.924 mm | 1.164 mm | 1.166 mm | 1.062 mm | 1.319 mm |
| 9.989 kN | 1.814 mm | 2.291 mm | 2.287 mm | 2.087 mm | 2.605 mm |
| 14.999 kN | 2.724 mm | 3.421 mm | 3.435 mm | 3.133 mm | 3.901 mm |
| 19.971 kN | 3.627 mm | 4.538 mm | 4.546 mm | 4.172 mm | 5.185 mm |
| 24.960 kN | 4.534 mm | 5.657 mm | 5.673 mm | 5.214 mm | 6.472 mm |
| 28.686 kN | 5.210 mm | 6.492 mm | 6.512 mm | 5.992 mm | 7.435 mm |

Mit Hilfe der beiden Diagramme unten (Abb. 3.37) ist zu erkennen, dass die in der Theorie berechnete lineare Zunahme der Durchbiegung bei zunehmender Kraft auch beim Experiment zum einen visuell aus der Abbildung zu erkennen ist, aber auch durch Betrachten des Bestimmtheitsmasses der linearen Regressionsgerade, welches immer grösser als 99.9 % ist (siehe Anhang 7.8). Dadurch lässt sich die Annahme der linearen Zunahme der Durchbiegung bei grösser werdender Kraft bestätigen.

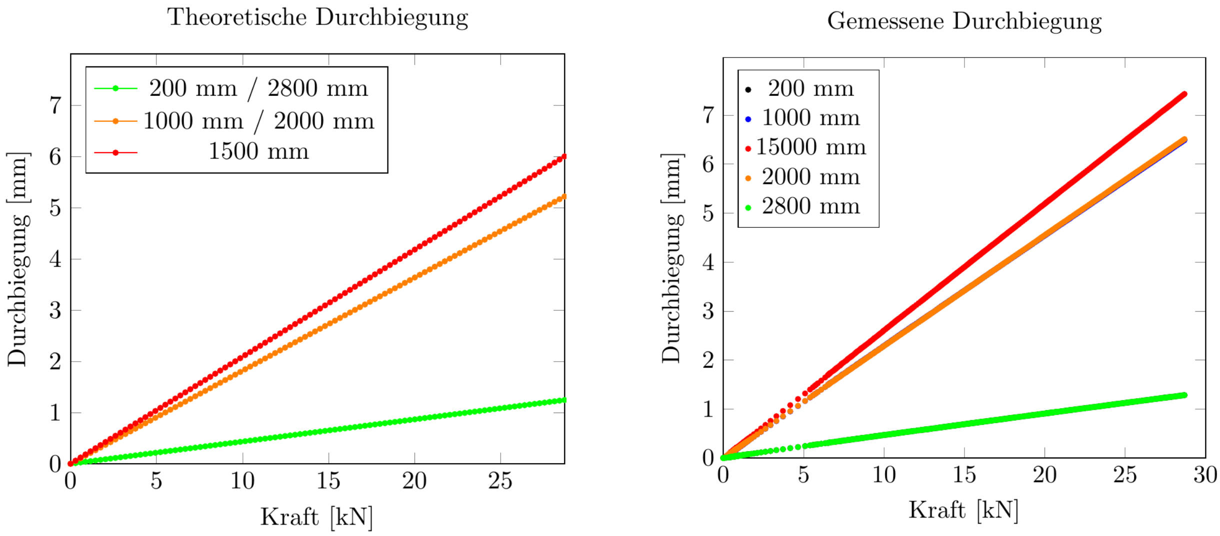



*Abb. 3.37 Vergleich der linearen Zunahme der Durchbiegung in Theorie und Experiment*

Aus der vorangehenden Tabelle und den Diagrammen ist herauszulesen, dass die theoretischen Werte eine Unterschätzung der tatsächlich gemessenen Werte sind. Die absolute Differenz bleibt nicht konstant. Somit ist eine falsche Kalibrierung eines Messgerätes grundsätzlich auszuschliessen. Vergleicht man aber die relativen Differenzen, zu sehen in der Abb. 3.38, so ist zu erkennen, dass die Theoriewerte sehr konstant eine Unterschätzung um 23 - 24 % darstellen im Bereich von $(l-a)/2$ bis $(l+a)/2$. In der Nähe des Auflagers ist die Abweichung etwas geringer und nimmt mit zunehmender Kraft ab.

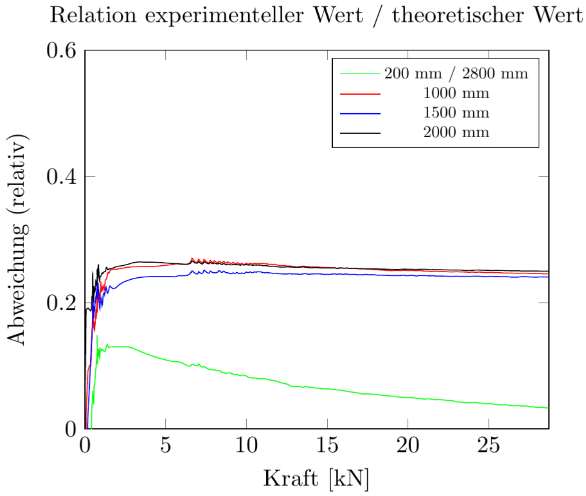



*Abb. 3.38 Abweichung des experimentellen Wertes gegenüber dem theoretischen Wert*

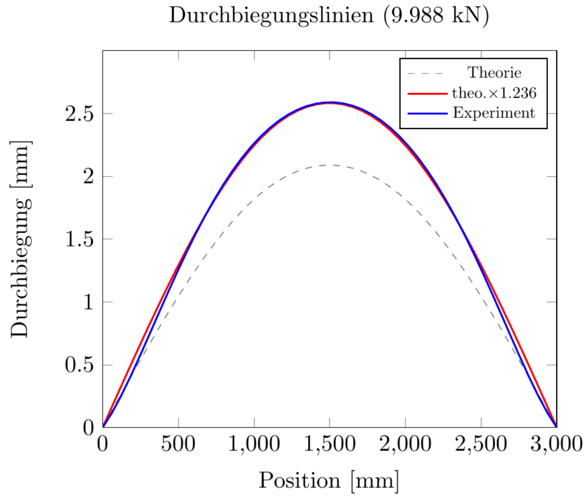



*Abb. 3.39 Theoretische Biegelinie bei 9.988 kN um 23.6 % nach oben verschoben*

Diese konstante Unterschätzung kann auf eine mögliche Schwäche im Balken hindeuten, zeigt gleichzeitig aber auch auf, dass die theoretische Biegeline mit der tatsächlichen Biegelinie von der Form her sehr genau übereinstimmt. Das wird auch deutlich, wenn die beiden Biegelinien bei gleicher Kraft übereinandergelegt werden, indem die theoretische Biegelinie um 23 - 24 % nach oben verschoben wird. Die obenstehende Abb. 3.39 zeigt die theoretische Biegelinie um ca. 23.6 % (entspricht dem Mittelwert der Abweichung bei $l/2$) nach oben verschoben, wodurch die Annäherung der tatsächlichen Biegelinie, mit Hilfe der experimentell gemessenen Durchbiegungen, sehr genau mit der theoretischen Biegelinie übereinstimmt. Das gilt nicht nur für eine Kraft von ca. 10 kN, sondern für alle Kräfte im elastischen Bereich.

Bereits im vorherigen Abschnitt 3.5.2 wurde die Stärke des Balkens beziehungsweise das Elastizitätsmodul angesprochen. Dort wurde geschlussfolgert, dass der Balken sich weniger stark biegen wird, als in der Theorie berechnet wird. Diese Annahme konnte aber eindeutig widerlegt werden, da die Biegung wie bereits öfters erwähnt um ca. 23.6 % höher liegt als berechnet. Das würde darauf hindeutet, dass es tatsächlich einen Fehler beim Messen des E-Moduls gab. Aus den berechneten Theoriewerten ist aber auch zu erkennen, dass auch mit dem Referenz-E-Modul von 210.00 GPa die Abweichung zwischen Theorie und Experiment nur geringfügig verkleinert wird. Somit entsteht ein Widerspruch zwischen dem vermeintlich «starken» E-Modul und dem aber tatsächlich «schwachen», sprich leichter biegbaren Balken. Deshalb können auch andere Einflussfaktoren zur deutlich erhöhten Durchbiegung des Balkens geführt haben.

Ein möglicher Faktor davon kann die Lasteinleitung sein. Diese kann aber aufgrund der fehlenden theoretischen Grundlagen in dieser Arbeit nicht genauer behandelt werden. Zu sagen ist nur, dass in Abb. 3.40 zu erkennen ist, wie der obere Flansch bei der Lasteinleitung versagt hat. Deshalb wurde die Durchbiegung durch ein Ausscheren des Balkens nicht mehr eindimensional, sondern zweidimensional. Es muss aber auch erwähnt werden, dass dies erst bei grösseren Kräften auftrat und somit grundsätzlich keinen Einfluss auf den elastischen Bereich gehabt haben sollte.


*Abb. 3.40 Versagen des Balkens an der Lasteinleitung ©HSLU*

Als Letztes gibt es noch die Ungenauigkeit, dass die Auflager im Experiment nicht wirklich Festlager waren, sondern Loslager. Der Balken besass bei jedem Auflager eine Bewegungsfreiheit von ca. 7 mm (Abb. 3.41). Da das Loslager aber die Theorierechnung zu kompliziert gemacht hätte, wurde es approximativ als Festlager angesehen. Der Unterschied sollte grundsätzlich nicht sehr gross sein, könnte aber dennoch einen nicht ganz zu vernachlässigbarem Einfluss gehabt haben.

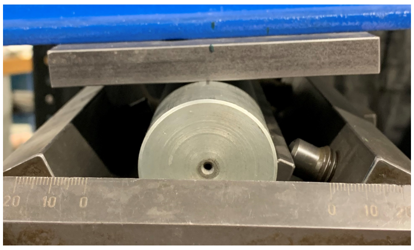


*Abb. 3.41 Bewegungsfreiheit des Auflagers*

### 3.5.4 Referenzdurchbiegung

Für die Durchbiegungen konnte kein offizielles Tabellenwerk gefunden werden, welches Referenzwerte für die Durchbiegung liefern könnte. Es gibt aber die Möglichkeit auf verschiedenen Websites, die Durchbiegung von einem Online-Tool berechnen zu lassen.

Nachfolgend sind in der Tabelle 3.11 die erhaltenen Werte auszumachen, welche mit dem Online-Tool von *schweizer-fn.de* [27] berechnet wurden. Im Anhang 7.6 ist ein Screen-Shot dieses Tools zu finden.

*Tabelle 3.11 Vergleich Referenzwerte (schweizer-fn.de) und Theoriewerte*

| **Kraft (F)** | $w\left(\frac{l \pm a}{2}\right)$ **Referenzwert** | $w\left(\frac{l - a}{2}\right)$ **Theorie** | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ **Referenzwert** | $w\left(\frac{l}{2}\right)$ **Theorie** |
|---|---|---|---|---|
| 5.000 kN | 0.908 mm | 0.908 mm | 1.040 mm | 1.044 mm |
| 10.000 kN | 1.820 mm | 1.816 mm | 2.090 mm | 2.089 mm |
| 25.000 kN | 4.540 mm | 4.541 mm | 5.220 mm | 5.222 mm |

Es ist zu erkennen, dass das Online-Tool vergleichbare Werte mit den in dieser Arbeit berechneten Theoriewerten lieferte. Daraus ist zu schliessen, dass die Theorierechnungen in dieser Arbeit mit grosser Wahrscheinlichkeit keine Fehler aufweisen.

### 3.5.5 Nicht-lineare Verläufe in den Spannungs-Dehnungs-Diagrammen

Das in Abschnitt 2.5.3 und 3.3.2 angesprochene und berechnete E-Modul entspricht der Steigung im elastischen Bereich auf dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Voraussetzung dafür ist, dass diese Zunahme linear verläuft. Analysiert man die Daten dieser Diagramme jedoch auf ihre Linearität, fällt auf, dass es doch grössere Abweichungen gibt.

Um die Daten zu untersuchen, werden die Messpunkte der Werkstoffprüfung bis zur oberen Streckgrenze $R_{eH}$ genommen und damit eine Polynom-Regressionsgerade berechnet. Da die Definition des Elastizitätsmoduls, der Quotient zwischen der Spannungsänderung $\Delta\sigma$ und der Dehnungsänderung $\Delta\varepsilon$ ist, entspricht das der Sekantensteigung. Wird nun anstelle des Differenzenquotienten der Differenzialquotient verwendet, lässt sich durch Ableiten der Polynomregressionsgerade das E-Modul durch die Tangentensteigung zu jedem beliebigen Zeitpunkt der Dehnung berechnen (Abb. 3.42). Das Diagramm zeigt auf, dass fünf von sechs Proben grössere Schwankungen zu Beginn aufweisen. Um den Bereich von 0.09 % Dehnung sind die Funktionen annähernd waagerecht bei ca. 222 GPa, was bedeutet, dass dort eine annähernde Linearität im Spannungs-Dehnungsdiagramm vorhanden ist. Insgesamt ist die Zunahme aber bei so gut wie allen Proben nicht linear genug, um die Werkstoffprüfung als verlässlich einzustufen. Somit ist das ein weiteres Indiz dafür, dass das Elastizitätsmodul nicht vollständig korrekt gemessen wurde. Die anfänglich grossen Schwankungen könnten darauf hindeuten, dass bei der Werkstoffprüfung nur ein Zyklus durchgeführt und das Material nicht, wie üblich, zuerst bis zu einem gewissen Punkt im elastischen Bereich unter Zug gesetzt wurde.

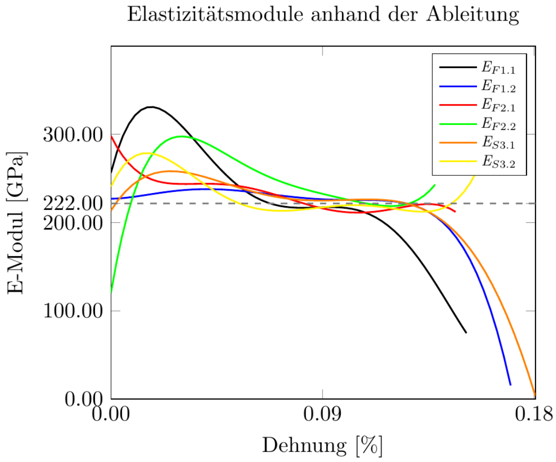



*Abb. 3.42 Momentanes Elastizitätsmodul*

### 3.5.6 Flächenträgheitsmoment und Elastizitätsgrenzwertrechnung

Bereits in der Theorierechnung wurden für das Flächenträgheitsmoment noch Grenzwertberechnungen durchgeführt. Diese Werte können nun benutzt werden, um anstelle von einem Durchbiegungswert, welche die Theorie liefert, einen Bereich anzugeben, in welchem sich die Durchbiegung befinden müsste. Damit das Ganze übersichtlich bleibt, werden die Durchbiegungen nur für die Kraft $F = 15\,\text{kN}$ berechnet, da die Durchbiegung linear zunimmt und so die relativen Differenzen bei jeder Kraft innerhalb der 1. Ordnung dieselben sein werden.

Als Erstes werden die verschiedenen Fälle der Parameterwahl aufgelistet:

- $w_1 : E = 222.00\,\text{GPa}, I_y = 10'330'344\,\text{mm}^4$ (Ausgangslage)
- $w_2 : E_{theo} = 210.00\,\text{GPa}, I_y = 10'330'344\,\text{mm}^4$ (theoretisches E-Modul)
- $w_3 : E = 222.00\,\text{GPa}, I_{y,\min} = 8'905'103\,\text{mm}^4$ (min. Flächenträgheitsmoment)
- $w_4 : E_{theo} = 210.00\,\text{GPa}, I_{y,\min} = 8'905'103\,\text{mm}^4$ (schwächster Balken)

Mit Hilfe dieser vier Fallunterscheidungen der vorherigen Seite werden vier Durchbiegungsfunktionen gezeichnet bei einer Kraft $F$ von 14.999 kN.

Aus der nebenstehenden Abb. 3.43 ist zu entnehmen, dass die absolute Differenz zwischen der Durchbiegung mittels gemessenem E-Modul und theoretischem Flächenträgheitsmoment und der Durchbiegung mittels theoretischem E-Modul und minimalem Flächenträgheitsmoment gut 0.71 mm beträgt. Aus relativer Sicht entspricht das einer relativen Zunahme von $w_1$ nach $w_4$ von gut 22.66 %. Der vierte Fall $w_4$ führt somit zu einer Zunahme, die nur etwa 1 % geringer ist als in Abschnitt 3.5.3 für die Verschiebung berechnet wurde.

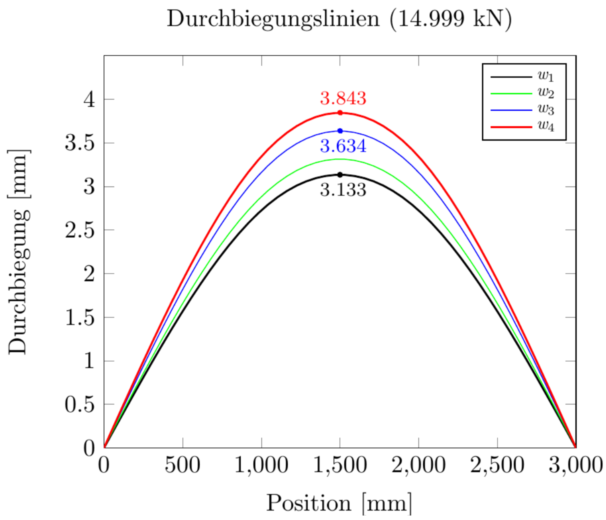



*Abb. 3.43 Durchbiegungslinien mit unterschiedlichen Parameterbedingungen und Grenzwerten*

Aus diesen Berechnungen lässt sich schlussfolgern, dass die Experimentalwerte der Durchbiegung um nur gerade 1.51 % daneben liegen würden, wenn der Balken das theoretische E-Modul besässe und das minimal zulässige Flächenträgheitsmoment hätte. Dieser Fall ist unwahrscheinlich, da er voraussetzt, dass jedes Querschnittmass jeweils genau an der untersten Grenze der Toleranz liegt und das Elastizitätsmodul tatsächlich dem theoretischen Wert entspricht und deutlich überschätzt wurde bei der Messung.

Die Grenzwertbetrachtung kann genauso gut auch gegenteilig gemacht werden, indem das Flächenträgheitsmoment des Balkens als maximal angenommen wird. Dies macht jedoch in diesem Falle für einen Vergleich keinen Sinn, da bereits klar ist, in welchem Wertebereich die tatsächliche Durchbiegung liegt. Sollte die Theorie aber ohne Experiment angewendet werden, so ist die untere Grenze der Durchbiegung unerlässlich, um so ein vollständiges Intervall angeben zu können, in welchem sich die tatsächliche Durchbiegung befinden wird.

Die beiden Theorie-Ansätze der Euler-Bernoulli-Balkentheorie liefern nach dieser Arbeit genaue Werte, falls die Parameter bekannt sind und korrekt gemessen wurden. Trotzdem reicht diese Arbeit und das Experiment nicht, um ein aussagekräftiges Resultat zu erhalten, da der Durchbiegungsbereich, welchen die Theorie liefert, deutlich zu gross ist und zu viele Annahmen und Optimierungen getroffen werden mussten, um genauere Theoriewerte zu erhalten.

### 3.5.7 Durchbiegung (ausserhalb 1. Ordnung)

Als Letztes werden weniger vertieft die Messresultate untersucht, welche nicht mehr im Definitionsbereich der 1. Ordnung liegen und teilweise bereits im plastischen Bereich liegen. Die 1. Ordnung wird verlassen, wenn die Kraft $F$ grösser als 28.725 kN wird. Nicht überraschend, ist in der Abb. 3.44 keine abrupte Veränderung im Verlauf der Messpunkte zu erkennen. Da die Theorie nicht für diese Kräfte ausgelegt ist, wird die Durchbiegung bei den theoretischen Werten immer linear zunehmen, da die verwendete Theorie keinen plastischen Bereich kennt genauer gesagt, nicht dafür ausgelegt ist.

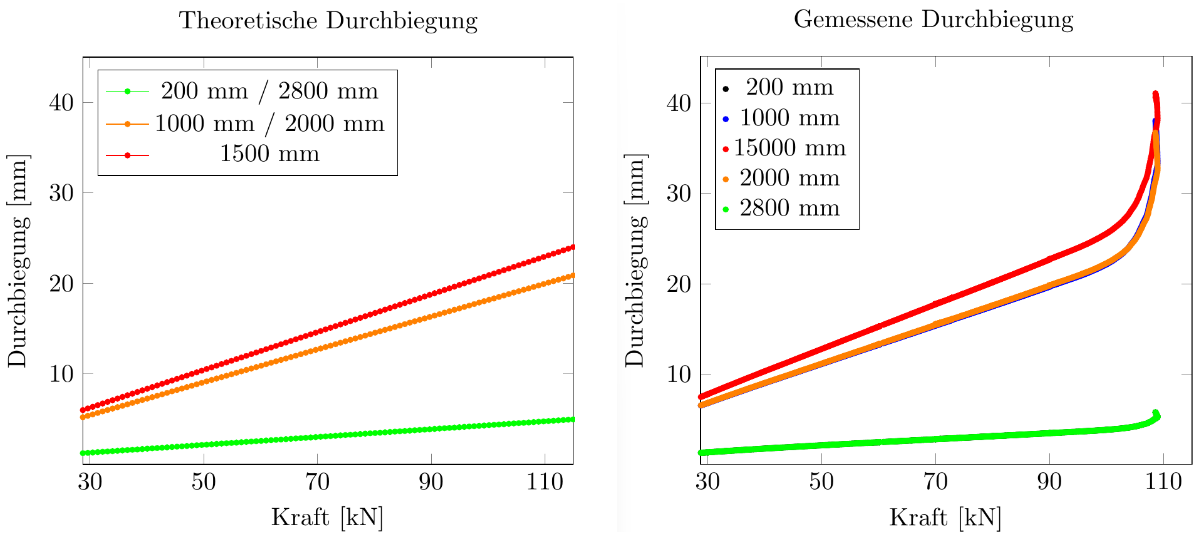



*Abb. 3.44 Vergleich der linearen Zunahme der Durchbiegung in Theorie und Experiment (ausserhalb 1. Ordnung)*

Die lineare Zunahme bei den gemessenen Durchbiegungen bleibt bis zu einer Kraft von ungefähr 96 kN bestehen. Ab diesem Moment nimmt die Durchbiegung im Vergleich zur Kraft nicht mehr linear zu und weist einen deutlichen Unterschied in der Zunahme im Vergleich zu der Theorie auf. In Abschnitt 3.3.6 wurde als Grenze zwischen dem elastischen und plastischen Bereich ca. 113 kN angegeben. Es ist auch hier zu erkennen, dass der Balken möglicherweise biegbarer war, als er hätte sein sollen. Auch hier sind diese Werte aber als fliessend zu betrachten und somit muss diese Aussage mit Vorsicht behandelt werden.

Das noch näherungsweise lineare Verhalten des Balkens auch ausserhalb der 1. Ordnung führt dazu, dass die Abweichung zwischen der Theorie für die 1. Ordnung und den Messungen ebenfalls nicht sehr stark zunimmt. Zumindest nicht bis zum plastischen Bereich. Die relative Abweichung kann aus Abb. 3.45 herausgelesen werden. Dabei ist noch deutlicher als im elastischen Bereich zu sehen, wie sich die Durchbiegungswerte in der Nähe der Auflager deutlich anders verhalten als Durchbiegungswerte in der Nähe der Balkenmitte.

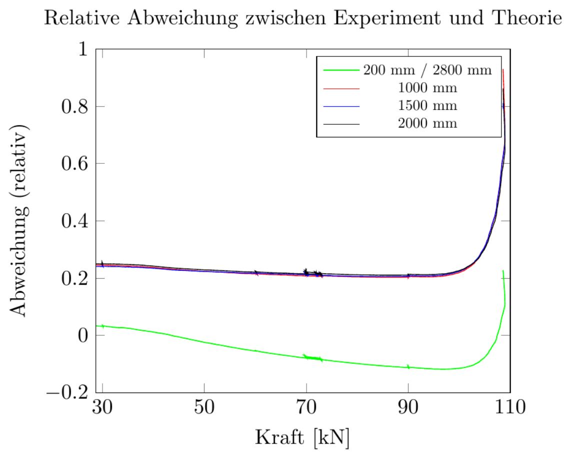



*Abb. 3.45 Relativer Vergleich zwischen den theoretischen und experimentellen Werten*

# 4 Reflexion

Die Arbeit zeigt, dass die Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung sehr genaue Durchbiegungswerte liefern sollte für Verformungen im elastischen Bereich. Das Experiment in dieser Arbeit, welches dazu diente die Genauigkeit zu überprüfen, hat jedoch deutlich abweichende Werte geliefert. Die Werte liegen teilweise über das 100-fache ausserhalb des maximalen Fehlers der Durchbiegung. Die Genauigkeit konnte somit nicht durch die absoluten Durchbiegungswerte überprüft werden. Beim Vergleichen der Durchbiegung von seitens der Biegelinienform in Abschnitt 3.5, konnte aber dargelegt werden, dass diese Form der theoretischen Funktion die tatsächliche Biegelinie des Balkens sehr genau beschreiben kann. Die anschliessende Verwendung der Grenzwerte des Flächenträgheitsmomentes und des Elastizitätsmoduls erlaubten es jedoch, einen Fall ausfindig zu machen, der nur 1.51 % von der gemessenen Durchbiegung abweichen würde. Dieser Fall ist eher unwahrscheinlich, aber dennoch möglich.

Des Weiteren kann aber die Hypothese der linearen Zunahme auch noch ausserhalb der Kraft, die zulässig für die 1. Ordnung ist, bestätigt werden. Diese lineare Veränderung ermöglicht es im Alltag, ohne die komplexe Biegelinienfunktion, schnell und einfach Durchbiegungen für Stahlträger zu berechnen, wenn bereits eine Kraft und die dazugehörige Durchbiegung bekannt sind.

Zusätzlich konnten die Annahmen für die Euler-Bernoulli-Balkentheorie 1. Ordnung untersucht werden. Diese konnte diskutiert und wo immer möglich bestätigt oder bewiesen werden.

Der Autor konnte in viele neue und weiterführende Themenbereiche der Physik, welche nicht oder nur grundlegend in der Schule behandelt werden, Einblick erhalten. Es gab viele Herausforderungen, die zu bewältigen waren. Eine der grösseren Herausforderungen war das Herleiten und Verstehen der Balkentheorie, da es wenige bis gar keine Quellen für einen solchen Vierpunktbelastungsversuch gibt. Der Autor konnte aber durch das vertiefte Auseinandersetzen mit diesem Thema einen sehr guten Einblick in die Themenwelt dieser Balkentheorie erhalten. Nebst den physikalischen Aspekten konnten auch die Fähigkeiten im Erstellen, Visualisieren und Erklären von Daten und Resultaten verbessert werden.

Die Arbeit lieferte dem Autor auch einen guten Einblick in die Studienrichtung eines Bauingenieurs, welche von ihm angestrebt wird. Durch die grosszügige Unterstützung von Daniel Heinzmann von der HSLU konnte auch ein etwas anspruchsvolleres Experiment durchgeführt werden. Leider waren die Resultate ungenauer, beziehungsweise weiter von den errechneten Werten entfernt, als vom Autor erwartet. Das Erklären dieser Ungenauigkeit wurde aber als Herausforderung genutzt, welche zu grossen Teilen gemeistert werden konnte. Insgesamt war es eine spannende und faszinierende Arbeit, für die der Autor gerne Zeit investiert hat.

## 4.1 Verbesserungsmöglichkeiten

Jede Arbeit weist Verbesserungspotential auf, dazu gehört auch diese Arbeit. Vor allem bei dem durchgeführten Experiment hätten einige Dinge anders oder zusätzlich durchgeführt werden müssen, um die Genauigkeit und Gefahr auf eine Ausreisserstichprobe zu verhindern. Dazu gehören unter anderem folgende Aspekte:

- Die Werkstoffprüfung sollte wiederholt werden, da der Literaturwert für Stahl nicht innerhalb des gemessenen Konfidenzintervalls des Elastizitätsmoduls liegt.
- Die Qualität des Stahlbalkens hätte überprüft werden müssen.
- Die Querbemassungen des Stahlbalkens hätten nachgemessen werden müssen, da in der Realität mit Fehlertoleranzen gearbeitet wird.
- Der Versuch hätte mehrmals mit je einem Stahlbalken gleicher Länge und sonstigen Bemassungen durchgeführt werden sollen, um eine bessere und aussagekräftigere statistische Auswertung zu ermöglichen.
- Die Anzahl der Messpunkte hätte erhöht werden können, um die Bestimmung der Biegelinie genauer zu machen.

## 4.2 Mögliche Weiterführungen

Grundsätzlich hat diese Arbeit nur einen sehr kleinen Bereich der gesamten Balkentheorie abgedeckt und bietet somit eine Grundlage für weitere ähnliche oder weiterführende Arbeiten in diesem Fachgebiet. Die untenstehende Auflistung nennt einige mögliche Weiterführungen beziehungsweise Ergänzungen zu dieser Arbeit:

- Verschiedene Bemassungen des Balkens ausprobieren, z.B. einen längeren Balken oder einen HEB- oder HEM-Träger.
- Andere Materialien wie Holz oder Beton (Zug- und Druckfestigkeit) untersuchen.
- Belastungsvariante verändern, indem anstelle von Punktlasten, Flächenlasten oder Streckenlasten angenommen werden.
- Tiefer in die Theorie eintauchen und die Euler-Bernoulli Balkentheorie 2. oder 3. Ordnung untersuchen.
- Weg vom Modell, näher zur Realität mit der Annahme eines nicht Schubstarren Balkens und der dazugehörigen Timoschenko-Balkentheorie.
- Ganze Balken-Konstruktionen untersuchen (einfache Brücken oder ähnliches).
- Interdisziplinäre-Verknüpfung zu Wirtschaft/Bauwirtschaft und dem Analysieren der kosteneffizientesten Balkenabmessung.
- Interdisziplinäre-Verknüpfung zu Life Sciences, Chemie und Umwelt in dem neue nachhaltige Materialien ausgetestet werden. Als Beispiel dafür das ganz zu Beginn der Arbeit erwähnte Graphen.

Mit Sicherheit gäbe es noch viele weitere spannende Möglichkeiten, diese Arbeit fortzuführen. Die obige Auflistung ist nicht abschliessend und zeigt nur eine kleine Auswahl möglicher Weiterführungen auf.

# 5 Bibliographie

## 5.1 Schriftliche Quellen und Dokumente

[1] C. Spura, *Technische Mechanik 2. Elastostatik: Nach fest kommt ab*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2019. doi: 10.1007/978-3-658-19979-1.

[2] „Balken“, *Wikipedia*. 21. Februar 2022. Zugegriffen: 24. Juni 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Balken&oldid=220456294

[3] „Stahl“, *Wikipedia*. 23. Juli 2022. Zugegriffen: 10. August 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Stahl&oldid=224750151

[4] „DIN EN 10020:2000-07, Begriffsbestimmung für die Einteilung der Stähle; Deutsche Fassung EN_10020:2000“. Zugegriffen: 19. Mai 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://www.beuth.de/de/norm/din-en-10020/27404233

[5] „DIN EN 10025-2:2019-10, Warmgewalzte Erzeugnisse aus Baustählen_- Teil_2: Technische Lieferbedingungen für unlegierte Baustähle; Deutsche Fassung EN_10025-2:2019“, Beuth Verlag GmbH. doi: 10.31030/3035421.

[6] „Stahlgewicht und Stahl Dichte“, *Metallenzyklopädie*, 29. Mai 2020. https://www.aw-technik.at/stahlgewicht-und-stahl-dichte/ (zugegriffen 10. August 2022).

[7] „Profilstahl“, *Wikipedia*. 8. November 2021. Zugegriffen: 10. August 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Profilstahl&oldid=217095847

[8] „Breitflanschträger“, *Wikipedia*. 5. November 2021. Zugegriffen: 10. August 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Breitflanschtr%C3%A4ger&oldid=217002145

[9] „DIN 1025-1:2009-04, Warmgewalzte I-Träger_- Teil_1: Schmale I-Träger, I-Reihe_- Maße, Masse, statische Werte“, Beuth Verlag GmbH. doi: 10.31030/1495734.

[10] „Lager (Statik)“, *Wikipedia*. 13. September 2021. Zugegriffen: 5. Oktober 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Lager_(Statik)&oldid=215546973#cite_ref-2

[11] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, und W. A. Wall, *Technische Mechanik 1*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. doi: 10.1007/978-3-662-49472-1.

[12] „Spannungs-Dehnungs-Diagramm“, *Maschinenbau-Wissen.de*. https://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/werkstofftechnik/metall/25-spannungs-dehnungs-diagramm (zugegriffen 4. Juli 2022).

[13] P. Marti, O. Monsch, und B. Schilling, *Ingenieur-Betonbau: Hintergrund, Stahlbeton, Betontragwerke*, 1. Aufl. Zürich [Singen]: Vdf, Hochsch.-Verl. an der ETH, 2005.

[14] „Flächenträgheitsmoment“, *Wikipedia*. 30. Juli 2022. Zugegriffen: 10. August 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://de.wikipedia.org/wiki/Flächenträgheitsmoment

[15] M. Gühr, „Affine Abbildungen, Unterrichtsheft“.

[16] S. Zweidler, *Baustatik. I*, 1. Auflage. Zürich: vdf Hochschulvlg, 2016.

[17] R. C. Hibbeler, *Technische Mechanik. 2: Festigkeitslehre: Lehr- und Übungsbuch*, 8., Aktualis. Aufl. München: Pearson, 2013.

[18] „DIN EN 10002-1:2001-12, Metallische Werkstoffe - Zugversuch - Teil 1: Prüfverfahren bei Raumtemperatur; Deutsche Fassung EN 10002-1:2001“, Beuth Verlag GmbH. Zugegriffen: 7. Oktober 2022. [Online]. Verfügbar unter: https://www.beuth.de/de/norm/din-en-10002-1/40710666

[19] „Schwerpunkt einer Fläche in Mathematik | Schülerlexikon | Lernhelfer“. https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/schwerpunkt-einer-flaeche (zugegriffen 6. September 2022).

[20] „DIN EN 10034:1994-03, I- und H-Profile aus Baustahl; Grenzabmaße und Formtoleranzen; Deutsche Fassung EN_10034:1993“, Beuth Verlag GmbH. doi: 10.31030/2557002.

[21] L. Roi, „Elementi di Teoria degli Errori“. [Online]. Verfügbar unter: http://www.lorenzoroi.net/prelievi/TeoriaErrori.pdf

[22] „Festigkeitswerte von Stahlwerkstoffen in Tabellenform“. https://www.schweizer-fn.de/festigkeit/festigkeitswerte/stahl/stahl_start.php (zugegriffen 18. August 2022).

[23] „Elastische und Plastische Verformung“. https://www.maschinenbau-wissen.de/skript3/werkstofftechnik/metall/20-verformung (zugegriffen 19. August 2022).

[24] J. Rösler, H. Harders, und M. Bäker, *Mechanical Behaviour of Engineering Materials: Metals, Ceramics, Polymers, and Composites*. Springer-Verlag, 2006.

[25] „Isotropes Material - 2012 - SOLIDWORKS Hilfe“. https://help.solidworks.com/2012/German/solidworks/cosmosxpresshelp/c_Isotropic_Material.htm (zugegriffen 4. Oktober 2022).

[26] D. Software, „Querschnittswerte für HEA-Träger“. https://www.dlubal.com/de/querschnittswerte/hea-140-din-1025-3-1994-03-ferona (zugegriffen 2. Oktober 2022).

[27] „Formelsammlung und Berechnungsprogramme Maschinen- und Anlagenbau“, *www.schweizer-fn.de*. https://www.schweizer-fn.de/festigkeit/biegung_traeger/frei_aufliegend/aufl2_2f_rech.php (zugegriffen 6. Oktober 2022).

## 5.2 Abbildungsverzeichnis

## 5.3 Tabellenverzeichnis



## 5.4 Dokumentenverzeichnis

# 6 Danksagung

An dieser Stelle möchte sich der Autor bei allen herzlich bedanken, die mit ihrer Unterstützung die Verfassung einer solchen Arbeit ermöglicht haben. Folgenden gebührt der Dank:

- Der Hochschule Luzern (HSLU) für ihre bereitwillige Unterstützung im Bereich der Infrastruktur (Messgeräte und Labor) und dem zur Verfügung stellen einiger Bilder.
- Dem Hochschulprofessor Dr. Daniel Heinzmann für die Unterstützung bei der Themenwahl, seinen ausgezeichneten fachlichen Erklärungen zur Balkentheorie und der Durchführung des Vierpunktbelastungsversuches.
- Der Firma Debrunner Acifer AG, welche den Breitflanschträger zur Verfügung gestellt hat.
- Michael Kurmann von der TAGMAR AG für das Theorie- und Bildmaterial.
- Prof. Dr. Taras Andreas und Dr. Vlad Silvestru für die weiterführende Betreuung vor dem SJF-Finale.
- Nicole Frei sowie Sibylle und Severin Gerber für das Einbringen einer Drittmeinung im formalen und grammatikalischen Bereich dieser Arbeit.

Ein besonderer Dank geht an den Betreuer Dr. rer. nat. Chiantese Stefano für die ausgezeichnete Unterstützung mit seinen fachlichen Expertisen, hilfreichen Inputs und Tipps für das Erstellen dieser Arbeit.

# 7 Anhang

## 7.1 Werkstoffprüfung

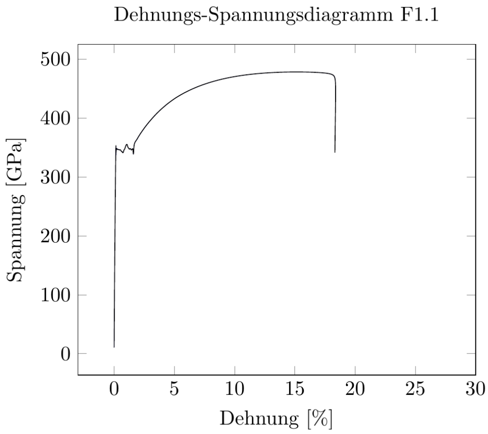


*Abb. 7.1 Dehnungs-Spannungsdiagramm F1.1*

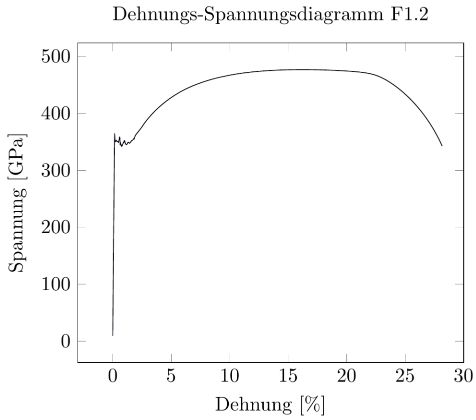


*Abb. 7.2 Dehnungs-Spannungsdiagramm F1.2*

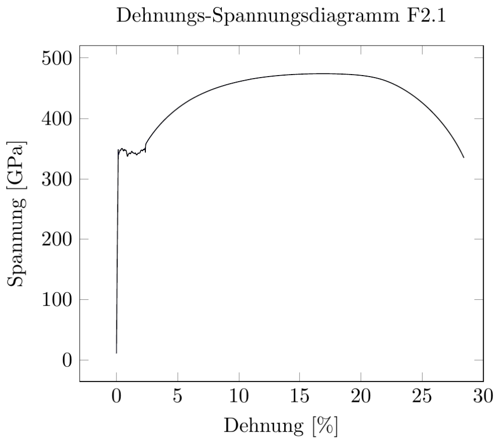


*Abb. 7.3 Dehnungs-Spannungsdiagramm F2.1*

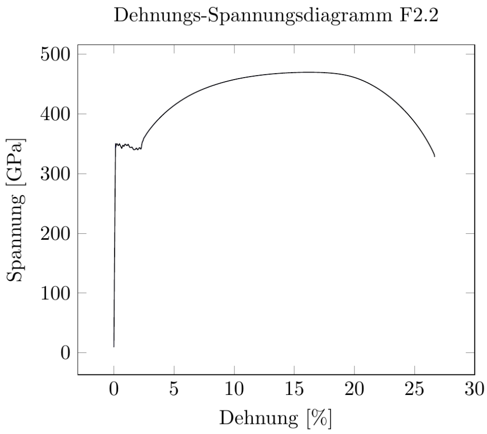


*Abb. 7.4 Dehnungs-Spannungsdiagramm F2.2*

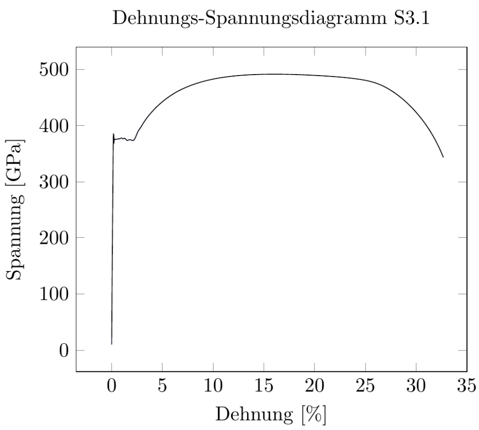


*Abb. 7.5 Dehnungs-Spannungsdiagramm S3.1*

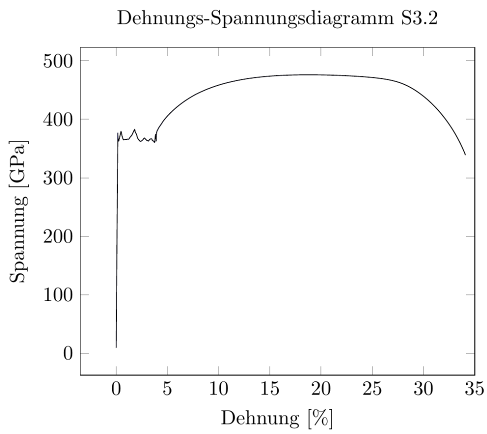


*Abb. 7.6 Dehnungs-Spannungsdiagramm S3.2*

Die vollständigen Daten sind auf Google Drive unter dem QR-Code oder mit dem Link abrufbar.
https://bit.ly/3V8SuDU

## 7.2 Bestimmung der Integrationskonstanten der Biegelinie

Segment 1:

$$w_1''(x) = M_1(x) = \frac{F}{2}x$$

$$w_1'(x) = \int w_1''\,dx = \frac{F}{4}x^2 + C_1$$

$$w_1(x) = \int w_1'\,dx = \frac{F}{12}x^3 + C_1x + C_2$$

Segment 2:

$$w_2''(x) = M_2(x) = \frac{F}{2}\cdot\frac{(l-a)}{2}$$

$$w_2'(x) = \int w_2''\,dx = \frac{F}{4}x\left(l-a\right) + C_3$$

$$w_2(x) = \int w_2'\,dx = \frac{F}{8}x^2\left(l-a\right) + C_3x + C_4$$

Gleichungssystem:

$I:\quad w_1(0) = 0$

$II:\quad w_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$III:\quad w_1'\left(\frac{l-a}{2}\right) = w_2'\left(\frac{l-a}{2}\right)$

$IV:\quad w_1\left(\frac{l-a}{2}\right) = w_2\left(\frac{l-a}{2}\right)$

Lösung mit CAS:

$$C_1 = \frac{F}{16}a^2 - \frac{F}{16}l^2$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{F}{8}al - \frac{F}{8}l^2$$

$$C_4 = -\frac{F}{96}a^3 + \frac{F}{32}a^2l - \frac{F}{32}al^2 + \frac{F}{96}l^3$$

## 7.3 Formänderungsenergie

*Tabelle 7.1 Formänderungsenergie [17]*

| Zug/Druck | Querkraft | Moment | Torsion |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}N\varepsilon$ | $\frac{1}{2}V\overline{\gamma}$ | $\frac{1}{2}M\psi'$ | $\frac{1}{2}M_T\varphi'$ |
| $\frac{1}{2}EA\varepsilon^2$ | $\frac{1}{2}GA_s\overline{\gamma}^2$ | $\frac{1}{2}EI\psi'^2$ | $\frac{1}{2}GI_T\varphi'^2$ |
| $\frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}$ | $\frac{1}{2}\frac{V^2}{GA_s}$ | $\frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}$ | $\frac{1}{2}\frac{M_T^2}{GI_T}$ |

## 7.4 Werkstoffprüfung

Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

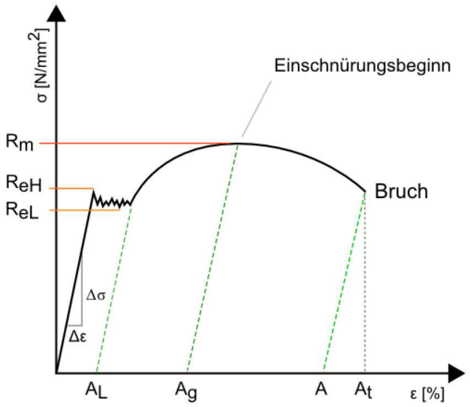
FH Zentralschweiz

**Prüfprotokoll: WL-22-009 Zug Bauabteilung**

Werkstoffprüflabor
Technikumstrasse 21
CH-6048 Horw

| | | |
|---|---|---|
| Prüfprotokoll | : | WL-22-009 Zug Bauabteilung |
| Kunde | : | HSLU Institut für Bauingenieurwesen |
| Prüfnorm | : | DIN EN ISO 6892-1 (A2) |
| Werkstoff | : | Baustahl |
| Probenentnahme | : | Aus Breitflanschträger HEA 140 S235JR+AR EN '10025 |
| Probentyp | : | Flachproben 5 mm dick, 12.5 mm breit |
| Prüfer | : | Ch. Fallegger |
| Bemerkung | : | FL = Probe aus Flansch, ST = Probe aus Steg |
| Maschinendaten | : | Zwick-Roell Z150 |
| | | 150 kN / Makroaufnehmer |

| Legende | Probenkennung | $m_E$ GPa | $R_{p0.2}$ MPa | $R_{eH}$ MPa | $R_m$ MPa | $A_{50mm}$ % | $S_0$ $mm^2$ | Z % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | FL_1.1 | 216 | - | 352 | 478 | 18.2 | 62.23 | 68 |
| | FL_1.2 | 227 | - | 364 | 476 | 28.0 | 62.28 | 69 |
| | FL_2.1 | 217 | - | 349 | 474 | 28.3 | 61.80 | 66 |
| | FL_2.2 | 233 | - | 351 | 470 | 26.6 | 62.35 | 68 |
| | ST_3.1 | 224 | - | 385 | 491 | 32.5 | 62.40 | 65 |
| | ST_3.2 | 215 | - | 377 | 476 | 33.9 | 63.60 | 67 |




$R_m$ = Zugfestigkeit
$R_{eH}$ = obere Streckgrenze
$R_{eL}$ = untere Streckgrenze
σ = Spannung

$A_L$ = Lüdersdehnung
$A_g$ = Gleichmaßdehnung
A = Bruchdehnung
$A_t$ = gesamte Dehnung bei Bruch
ε = Dehnung

*Bildquelle:*
*www.maschinenbau-wissen.de*

*A50mm entspricht der Bruchdehnung des Stahls mit einer Anfangsmesslänge L0 von 50mm*

WL-22-009 Zug Bauabteilung.zs2 Druckdatum: 18.05.22 Seite 1/2

*Dokument 7.1 HSLU Prüfprotokoll Werkstoffcharakteristik HEA140 S23*

## 7.5 Messresultate im Bereich der 1. Ordnung

| Kraft (F) [kN] | Kraft (Q) [kN] | Auflager [mm] | (l-a)/2 [mm] | l/2 [mm] | (l+a)/2 [mm] | Auflager [mm] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 | 0.00E+00 |
| 0.000485801 | 0.0002429 | 0.000232031 | 0.001494193 | 0.000277914 | 0.000100383 | 0.000232031 |
| 0.001304891 | 0.000652446 | 0.000238953 | 0.001472202 | 0.000279822 | 0.000251014 | 0.000238953 |
| 0.001956833 | 0.000978416 | 0.000244514 | 0.001456131 | 0.000279392 | 0.000348092 | 0.000244514 |
| 0.002252732 | 0.001126366 | 0.000248658 | 0.001447546 | 0.000277189 | 0.000392666 | 0.000248658 |
| 0.002430022 | 0.001215011 | 0.000251255 | 0.001439559 | 0.000272251 | 0.000409818 | 0.000251255 |
| 0.002500225 | 0.001250113 | 0.000251899 | 0.001431013 | 0.000267781 | 0.000426843 | 0.000251899 |
| 0.002224019 | 0.001112009 | 0.000250823 | 0.001419717 | 0.000268835 | 0.000441528 | 0.000250823 |
| 0.002407094 | 0.001203547 | 0.000251578 | 0.001399977 | 0.000267769 | 0.000451691 | 0.000251578 |
| 0.002814771 | 0.001407386 | 0.000249331 | 0.001380824 | 0.000262967 | 0.000476417 | 0.000249331 |
| 0.009346659 | 0.00467333 | 0.000152722 | 0.000369712 | 0.000805419 | 0.001809087 | 0.000152722 |
| 0.068790637 | 0.034395318 | 0.001455986 | 0.012812981 | 0.013401452 | 0.014861696 | 0.001455986 |
| 0.179055423 | 0.089527711 | 0.005803408 | 0.035512932 | 0.038196283 | 0.038748262 | 0.005803408 |
| 0.285557091 | 0.142778546 | 0.011053324 | 0.057086895 | 0.064025838 | 0.061661078 | 0.011053324 |
| 0.350962788 | 0.175481394 | 0.014626688 | 0.07012163 | 0.081449119 | 0.075663768 | 0.014626688 |
| 0.383044451 | 0.191522226 | 0.016401185 | 0.077229904 | 0.090365276 | 0.082667891 | 0.016401185 |
| 0.400640011 | 0.200320005 | 0.017440149 | 0.082334202 | 0.095023673 | 0.086693678 | 0.017440149 |
| 0.412888646 | 0.206444323 | 0.018272786 | 0.086075807 | 0.098177738 | 0.089993145 | 0.018272786 |
| 0.42266497 | 0.211332485 | 0.018905461 | 0.088560602 | 0.100678541 | 0.092736039 | 0.018905461 |
| 0.430934727 | 0.215467364 | 0.01936208 | 0.090483908 | 0.102925483 | 0.094768655 | 0.01936208 |
| 0.43878448 | 0.21939224 | 0.019739265 | 0.092236541 | 0.105169758 | 0.09636898 | 0.019739265 |
| 0.446466923 | 0.223233461 | 0.020105705 | 0.094152655 | 0.107614469 | 0.097863521 | 0.020105705 |
| 0.453602374 | 0.226801187 | 0.020507332 | 0.095697422 | 0.110009566 | 0.099645723 | 0.020507332 |
| 0.460244477 | 0.230122238 | 0.020906502 | 0.097312853 | 0.112187494 | 0.10159447 | 0.020906502 |
| 0.464988351 | 0.232494175 | 0.021209153 | 0.099210521 | 0.114074361 | 0.103487935 | 0.021209153 |
| 0.468180656 | 0.234090328 | 0.021379555 | 0.1009447 | 0.115522545 | 0.105242021 | 0.021379555 |
| 0.472461075 | 0.236230537 | 0.021512359 | 0.102238668 | 0.117398366 | 0.106814262 | 0.021512359 |
| 0.476364493 | 0.238182247 | 0.021674009 | 0.102961252 | 0.118990138 | 0.107659303 | 0.021674009 |
| 0.477971286 | 0.238985643 | 0.021811732 | 0.10445492 | 0.120255519 | 0.107982278 | 0.021811732 |
| 0.478013039 | 0.239006519 | 0.021892522 | 0.106173538 | 0.12121772 | 0.108125605 | 0.021892522 |
| 0.477716446 | 0.238858223 | 0.021934018 | 0.106956843 | 0.121630408 | 0.10824462 | 0.021934018 |
| 0.478583992 | 0.239291996 | 0.021966436 | 0.10710006 | 0.121718239 | 0.108345579 | 0.021966436 |
| 0.483228296 | 0.241614148 | 0.022048029 | 0.107103735 | 0.121832468 | 0.108551633 | 0.022048029 |
| 0.492584407 | 0.246292204 | 0.022362969 | 0.107262693 | 0.12288937 | 0.109423518 | 0.022362969 |
| 0.50440532 | 0.25220266 | 0.022934252 | 0.108238725 | 0.125641197 | 0.111435566 | 0.022934252 |
| 0.515754104 | 0.257877052 | 0.023544208 | 0.109829113 | 0.128655348 | 0.113785014 | 0.023544208 |
| 0.527427256 | 0.263713628 | 0.024003746 | 0.111885119 | 0.131041288 | 0.115915056 | 0.024003746 |
| 0.539739728 | 0.269869864 | 0.024280385 | 0.113813635 | 0.132794339 | 0.117778081 | 0.024280385 |
| 0.54674232 | 0.27337116 | 0.024652631 | 0.11520486 | 0.13422763 | 0.119911663 | 0.024652631 |
| 0.550692618 | 0.275346309 | 0.025118966 | 0.11651792 | 0.136223834 | 0.122242 | 0.025118966 |
| 0.556024909 | 0.278012455 | 0.025574732 | 0.118006673 | 0.138491426 | 0.123857364 | 0.025574732 |
| 0.562604606 | 0.281302303 | 0.026003438 | 0.119513366 | 0.140318699 | 0.124845333 | 0.026003438 |
| 0.569405675 | 0.284702837 | 0.026365257 | 0.120505087 | 0.141739853 | 0.125921234 | 0.026365257 |
| 0.575924814 | 0.287962407 | 0.026681496 | 0.121475879 | 0.143239699 | 0.12721131 | 0.026681496 |
| 0.582088292 | 0.291044146 | 0.026990409 | 0.122544389 | 0.144764125 | 0.128647827 | 0.026990409 |
| 0.588563144 | 0.294281572 | 0.027290852 | 0.123757601 | 0.146194376 | 0.130230315 | 0.027290852 |
| 0.595048666 | 0.297524333 | 0.027584472 | 0.125211801 | 0.147631198 | 0.131851621 | 0.027584472 |
| 0.601077139 | 0.30053857 | 0.027879681 | 0.126751523 | 0.149191551 | 0.133235298 | 0.027879681 |
| 0.606947899 | 0.303473949 | 0.028188542 | 0.128210817 | 0.150841385 | 0.134449363 | 0.028188542 |
| 0.612707794 | 0.306353897 | 0.028527041 | 0.129493549 | 0.152713642 | 0.135788683 | 0.028527041 |
| 0.61857301 | 0.309286505 | 0.028876683 | 0.130741853 | 0.154661819 | 0.137044922 | 0.028876683 |
| 0.624636412 | 0.312318206 | 0.029212232 | 0.132189032 | 0.156504869 | 0.138322514 | 0.029212232 |
| 0.630764008 | 0.315382004 | 0.029522758 | 0.133737054 | 0.158339806 | 0.139759392 | 0.029522758 |
| 0.636734962 | 0.318367481 | 0.029826036 | 0.135114517 | 0.160065576 | 0.141159624 | 0.029826036 |
| 0.641879618 | 0.320939809 | 0.030145939 | 0.136713047 | 0.161440134 | 0.142779477 | 0.030145939 |
| 0.646456659 | 0.323228329 | 0.030456525 | 0.138631895 | 0.162598349 | 0.144370273 | 0.030456525 |
| 0.651406229 | 0.325703114 | 0.03074073 | 0.140007935 | 0.163746156 | 0.145712569 | 0.03074073 |
| 0.655912876 | 0.327956438 | 0.031001207 | 0.140968312 | 0.165002599 | 0.146870829 | 0.031001207 |
| 0.65930301 | 0.329651505 | 0.031227696 | 0.141763464 | 0.166258313 | 0.147761419 | 0.031227696 |
| 0.663304329 | 0.331652164 | 0.031444607 | 0.142377682 | 0.167490348 | 0.148621097 | 0.031444607 |
| 0.668788493 | 0.334394246 | 0.031712415 | 0.143174089 | 0.168936297 | 0.149619155 | 0.031712415 |
| 0.674695253 | 0.337347627 | 0.032012527 | 0.144225795 | 0.170356885 | 0.15074797 | 0.032012527 |
| 0.6802876 | 0.3401438 | 0.032311918 | 0.145261917 | 0.171653032 | 0.15184173 | 0.032311918 |
| 0.685662687 | 0.342831343 | 0.032606388 | 0.146398365 | 0.173286736 | 0.152779594 | 0.032606388 |
| 0.690667331 | 0.345333666 | 0.032908466 | 0.14764709 | 0.174832642 | 0.154011056 | 0.032908466 |
| 0.69538343 | 0.347691715 | 0.033202855 | 0.148794208 | 0.176002271 | 0.155321166 | 0.033202855 |
| 0.699896276 | 0.349948138 | 0.033473577 | 0.14987072 | 0.177272104 | 0.156321198 | 0.033473577 |
| 0.704473197 | 0.352236599 | 0.03372382 | 0.150925361 | 0.178692207 | 0.157402426 | 0.03372382 |
| 0.708818257 | 0.354409128 | 0.033963664 | 0.152111217 | 0.179945216 | 0.158515811 | 0.033963664 |
| 0.712958515 | 0.356479257 | 0.034183014 | 0.153555501 | 0.180972002 | 0.159439355 | 0.034183014 |
| 0.716964364 | 0.358482182 | 0.03439226 | 0.154862966 | 0.181898877 | 0.160340756 | 0.03439226 |
| 0.720775783 | 0.360387892 | 0.034617234 | 0.155823044 | 0.182901084 | 0.16125834 | 0.034617234 |
| 0.724478245 | 0.362239122 | 0.034881748 | 0.157238264 | 0.184277877 | 0.162355408 | 0.034881748 |
| 0.72789222 | 0.36394611 | 0.035133993 | 0.15865631 | 0.185540274 | 0.163401239 | 0.035133993 |
| 0.731033742 | 0.365516871 | 0.035329683 | 0.159327466 | 0.186284736 | 0.164168231 | 0.035329683 |
| 0.734200478 | 0.367100239 | 0.035490043 | 0.159545399 | 0.1868008 | 0.164748788 | 0.035490043 |
| 0.737461746 | 0.368730873 | 0.035648353 | 0.159830812 | 0.187414691 | 0.165326402 | 0.035648353 |
| 0.740851462 | 0.370425731 | 0.035814635 | 0.160235241 | 0.188060567 | 0.165977135 | 0.035814635 |
| 0.743827879 | 0.37191394 | 0.035980888 | 0.160521988 | 0.188570984 | 0.166705057 | 0.035980888 |
| 0.746228576 | 0.373114288 | 0.036136718 | 0.160755966 | 0.188981742 | 0.167408571 | 0.036136718 |
| 0.748584569 | 0.374292284 | 0.036278255 | 0.161082491 | 0.189396128 | 0.167943068 | 0.036278255 |
| 0.751241326 | 0.375620663 | 0.036408074 | 0.161549956 | 0.189864472 | 0.168436132 | 0.036408074 |
| 0.753873229 | 0.376936615 | 0.036527958 | 0.162246972 | 0.190436415 | 0.16908697 | 0.036527958 |
| 0.756125271 | 0.378062636 | 0.03663682 | 0.162969578 | 0.191072837 | 0.169689775 | 0.03663682 |
| 0.758203864 | 0.379101932 | 0.036737267 | 0.163678769 | 0.191703588 | 0.170165963 | 0.036737267 |
| 0.760032535 | 0.380016267 | 0.036827112 | 0.164239336 | 0.192203201 | 0.170652315 | 0.036827112 |
| 0.761700869 | 0.380850434 | 0.036911227 | 0.164586298 | 0.192553952 | 0.171230964 | 0.036911227 |
| 0.763358355 | 0.381679177 | 0.036994072 | 0.164894287 | 0.192822047 | 0.171777532 | 0.036994072 |
| 0.764075041 | 0.38203752 | 0.037074903 | 0.165413678 | 0.193041928 | 0.172152892 | 0.037074903 |
| 0.754211307 | 0.377105653 | 0.037026437 | 0.165947869 | 0.1928697 | 0.170942657 | 0.037026437 |
| 0.741220295 | 0.370610148 | 0.036868138 | 0.166108739 | 0.192282885 | 0.168662667 | 0.036868138 |
| 0.741365016 | 0.370682508 | 0.036821872 | 0.166116815 | 0.191975534 | 0.168245137 | 0.036821872 |
| 0.748615503 | 0.374307752 | 0.036877383 | 0.166154746 | 0.192040488 | 0.169162475 | 0.036877383 |
| 0.754689753 | 0.377344877 | 0.036949778 | 0.166241661 | 0.192369357 | 0.170418225 | 0.036949778 |
| 0.758907199 | 0.379453599 | 0.037009405 | 0.16644099 | 0.193052359 | 0.172083259 | 0.037009405 |
| 0.7624259 | 0.38121295 | 0.037059184 | 0.166821823 | 0.19378221 | 0.173377007 | 0.037059184 |
| 0.765901506 | 0.382950753 | 0.037088212 | 0.167191893 | 0.194235817 | 0.173946746 | 0.037088212 |
| 0.772043526 | 0.386021763 | 0.03701937 | 0.167581383 | 0.194759637 | 0.174575336 | 0.03701937 |
| 0.775628924 | 0.387814462 | 0.03701962 | 0.167916231 | 0.195399344 | 0.175350361 | 0.03701962 |
| 0.774754643 | 0.387377322 | 0.037180178 | 0.168585163 | 0.196030416 | 0.175889648 | 0.037180178 |
| 0.774272859 | 0.38713643 | 0.037342208 | 0.169905908 | 0.196642868 | 0.176259905 | 0.037342208 |
| 0.775646091 | 0.387823045 | 0.037457395 | 0.171061125 | 0.19703418 | 0.176481642 | 0.037457395 |
| 0.777403891 | 0.388701946 | 0.037559466 | 0.171625368 | 0.197263181 | 0.176685594 | 0.037559466 |
| 0.778928161 | 0.38946408 | 0.037662156 | 0.171811339 | 0.197447717 | 0.176969506 | 0.037662156 |
| 0.780491769 | 0.390245885 | 0.037765831 | 0.171920508 | 0.197679006 | 0.177292161 | 0.037765831 |
| 0.782044888 | 0.391022444 | 0.037866896 | 0.172120817 | 0.198115841 | 0.177694522 | 0.037866896 |
| 0.783504725 | 0.391752362 | 0.037962047 | 0.172503084 | 0.198713303 | 0.177976675 | 0.037962047 |
| 0.784976602 | 0.392488301 | 0.038051313 | 0.172917612 | 0.199217059 | 0.17808795 | 0.038051313 |
| 0.786592424 | 0.393296212 | 0.03813618 | 0.173180379 | 0.19957421 | 0.178125612 | 0.03813618 |
| 0.787913084 | 0.393956542 | 0.038211206 | 0.173331857 | 0.200343311 | 0.178465381 | 0.038211206 |
| 0.788910091 | 0.394455045 | 0.038276695 | 0.173465058 | 0.201983519 | 0.179391943 | 0.038276695 |
| 0.790180326 | 0.395090163 | 0.038340984 | 0.173605934 | 0.203202017 | 0.180101633 | 0.038340984 |
| 0.791950047 | 0.395975024 | 0.03840884 | 0.173734359 | 0.203638069 | 0.180363491 | 0.03840884 |
| 0.793711424 | 0.396855712 | 0.038481401 | 0.173906941 | 0.203733474 | 0.180441432 | 0.038481401 |
| 0.795442104 | 0.397721052 | 0.038556471 | 0.174184054 | 0.203801483 | 0.1805389 | 0.038556471 |
| 0.796893358 | 0.398446679 | 0.038628183 | 0.174402464 | 0.203890957 | 0.180629082 | 0.038628183 |
| 0.797914743 | 0.398957372 | 0.038696989 | 0.174544275 | 0.2039847 | 0.180705361 | 0.038696989 |
| 0.798969984 | 0.399484992 | 0.038764264 | 0.174954906 | 0.204120018 | 0.180838898 | 0.038764264 |
| 0.800085664 | 0.400042832 | 0.038827453 | 0.175468244 | 0.204266012 | 0.181009986 | 0.038827453 |
| 0.801371634 | 0.400685817 | 0.038885623 | 0.175739449 | 0.204384856 | 0.181158364 | 0.038885623 |
| 0.802358687 | 0.401179343 | 0.038942279 | 0.17583454 | 0.204497129 | 0.18127612 | 0.038942279 |
| 0.803077579 | 0.401538789 | 0.038999598 | 0.175898459 | 0.204626195 | 0.181406662 | 0.038999598 |
| 0.803879917 | 0.401939958 | 0.03905173 | 0.175981279 | 0.204785272 | 0.181610689 | 0.03905173 |
| 0.804803252 | 0.402401626 | 0.039094409 | 0.176085591 | 0.204960175 | 0.181911364 | 0.039094409 |
| 0.805762768 | 0.402881384 | 0.03912699 | 0.17620191 | 0.2051365 | 0.182201773 | 0.03912699 |
| 0.806117237 | 0.403058618 | 0.039152853 | 0.176385436 | 0.205328181 | 0.182419777 | 0.039152853 |
| 0.806621075 | 0.403310537 | 0.039178822 | 0.176706661 | 0.205575854 | 0.182590917 | 0.039178822 |
| 0.807390988 | 0.403695494 | 0.039204307 | 0.177023672 | 0.205799237 | 0.182724632 | 0.039204307 |
| 0.808110952 | 0.404055476 | 0.03922772 | 0.177255217 | 0.205961749 | 0.182839297 | 0.03922772 |

| Kraft (F) [kN] | Kraft (Q) [kN] | Auflager [mm] | (l-a)/2 [mm] | l/2 [mm] | (l+a)/2 [mm] | Auflager [mm] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.808701575 | 0.404350787 | 0.039251208 | 0.177403457 | 0.206072561 | 0.182939708 | 0.039251208 |
| 0.809372783 | 0.404686391 | 0.039275823 | 0.177495558 | 0.206150889 | 0.183032334 | 0.039275823 |
| 0.810250878 | 0.405125439 | 0.039303407 | 0.177578885 | 0.206226297 | 0.183150209 | 0.039303407 |
| 0.811096787 | 0.405548394 | 0.039334234 | 0.177672595 | 0.2063234 | 0.183317073 | 0.039334234 |
| 0.811832488 | 0.405916244 | 0.039368823 | 0.177774552 | 0.206449308 | 0.183503419 | 0.039368823 |
| 0.812594533 | 0.406297266 | 0.039407043 | 0.177901108 | 0.206617072 | 0.183667473 | 0.039407043 |
| 0.813380003 | 0.406690001 | 0.039443968 | 0.178060096 | 0.206801236 | 0.18379987 | 0.039443968 |
| 0.813914657 | 0.406957328 | 0.039479822 | 0.17829844 | 0.206965238 | 0.18390663 | 0.039479822 |
| 0.814680696 | 0.407340348 | 0.039514769 | 0.178656284 | 0.207142383 | 0.184073605 | 0.039514769 |
| 0.815503657 | 0.407751828 | 0.039560085 | 0.179121815 | 0.207734823 | 0.184590951 | 0.039560085 |
| 0.816308737 | 0.408154368 | 0.039628725 | 0.179595672 | 0.208664708 | 0.185258217 | 0.039628725 |
| 0.817488253 | 0.408744127 | 0.039694574 | 0.179966621 | 0.20939362 | 0.185864747 | 0.039694574 |
| 0.819129944 | 0.409564972 | 0.03974491 | 0.180247553 | 0.209840991 | 0.186337695 | 0.03974491 |
| 0.820674241 | 0.41033712 | 0.039796483 | 0.180429582 | 0.210065313 | 0.186582528 | 0.039796483 |
| 0.822093725 | 0.411046863 | 0.039858948 | 0.180548072 | 0.210207976 | 0.186758295 | 0.039858948 |
| 0.823442936 | 0.411721468 | 0.039933376 | 0.18067769 | 0.210415944 | 0.187194541 | 0.039933376 |
| 0.824637115 | 0.412318558 | 0.040012682 | 0.180842265 | 0.210696757 | 0.188194662 | 0.040012682 |
| 0.826146305 | 0.413073152 | 0.040091028 | 0.181162689 | 0.211023435 | 0.189137086 | 0.040091028 |
| 0.828011453 | 0.414005727 | 0.040170928 | 0.181798805 | 0.211401038 | 0.189658448 | 0.040170928 |
| 0.830324888 | 0.415162444 | 0.040258562 | 0.182401437 | 0.211884677 | 0.189977221 | 0.040258562 |
| 0.832945406 | 0.416472703 | 0.040364623 | 0.182933383 | 0.212490298 | 0.190308847 | 0.040364623 |
| 0.836238444 | 0.418119222 | 0.040510679 | 0.183828875 | 0.21325358 | 0.190744229 | 0.040510679 |
| 0.840053856 | 0.420026928 | 0.040768333 | 0.185048398 | 0.214131221 | 0.191359289 | 0.040768333 |
| 0.844556987 | 0.422278494 | 0.041138586 | 0.186118178 | 0.215121008 | 0.192278869 | 0.041138586 |
| 0.850561857 | 0.425280929 | 0.041506087 | 0.187222853 | 0.216207378 | 0.193567239 | 0.041506087 |
| 0.857673287 | 0.428836644 | 0.041860012 | 0.188546732 | 0.217475437 | 0.19488214 | 0.041860012 |
| 0.865337074 | 0.432668537 | 0.042243218 | 0.190195255 | 0.218628466 | 0.195932075 | 0.042243218 |
| 0.874162793 | 0.437081397 | 0.042623099 | 0.192669772 | 0.219820626 | 0.197157867 | 0.042623099 |
| 0.886984527 | 0.443492264 | 0.042914538 | 0.195120901 | 0.2218858 | 0.199039228 | 0.042914538 |
| 0.900949657 | 0.450474828 | 0.043316361 | 0.197349951 | 0.22442963 | 0.201717138 | 0.043316361 |
| 0.912440419 | 0.45622021 | 0.044026274 | 0.199838415 | 0.226937108 | 0.20497372 | 0.044026274 |
| 0.925334275 | 0.462667137 | 0.044856522 | 0.203110315 | 0.230652645 | 0.208432123 | 0.044856522 |
| 0.940374792 | 0.470187396 | 0.045676293 | 0.206631236 | 0.235415794 | 0.211924806 | 0.045676293 |
| 0.95603174 | 0.47801587 | 0.046484273 | 0.21133057 | 0.240135849 | 0.215515524 | 0.046484273 |
| 0.96929276 | 0.48464638 | 0.047228146 | 0.216531679 | 0.243820965 | 0.218614928 | 0.047228146 |
| 0.979657054 | 0.489828527 | 0.047790991 | 0.219471507 | 0.246754207 | 0.220990866 | 0.047790991 |
| 0.992440462 | 0.496220231 | 0.048372954 | 0.221019886 | 0.250316635 | 0.224047288 | 0.048372954 |
| 1.009447217 | 0.504723608 | 0.04916708 | 0.223329127 | 0.254086815 | 0.22810775 | 0.04916708 |
| 1.0282619 | 0.51413095 | 0.050068848 | 0.227467626 | 0.257669806 | 0.232667707 | 0.050068848 |
| 1.046450973 | 0.523225486 | 0.050964877 | 0.2323047 | 0.261249639 | 0.236955523 | 0.050964877 |
| 1.064286351 | 0.532143176 | 0.05186533 | 0.236038379 | 0.26613088 | 0.240869589 | 0.05186533 |
| 1.081728935 | 0.540864468 | 0.05272441 | 0.239804253 | 0.270469472 | 0.244805917 | 0.05272441 |
| 1.098942757 | 0.549471378 | 0.053553393 | 0.24449648 | 0.276015051 | 0.248957105 | 0.053553393 |
| 1.117254853 | 0.558627427 | 0.05442285 | 0.249023721 | 0.282577939 | 0.253073744 | 0.05442285 |
| 1.138473988 | 0.569236994 | 0.055408422 | 0.253475226 | 0.288595006 | 0.257882982 | 0.055408422 |
| 1.162709951 | 0.581354976 | 0.056553034 | 0.258472115 | 0.295138896 | 0.263632081 | 0.056553034 |
| 1.187451243 | 0.593725622 | 0.057725463 | 0.263234846 | 0.30153355 | 0.269445747 | 0.057725463 |
| 1.210689425 | 0.605344713 | 0.05884207 | 0.268861286 | 0.306720957 | 0.274723545 | 0.05884207 |
| 1.232764959 | 0.61638248 | 0.05995997 | 0.275527969 | 0.313171461 | 0.279739156 | 0.05995997 |
| 1.25613153 | 0.628065765 | 0.061166033 | 0.28180334 | 0.320071116 | 0.285008416 | 0.061166033 |
| 1.28094697 | 0.640473485 | 0.062452611 | 0.287782326 | 0.327231809 | 0.291253619 | 0.062452611 |
| 1.308534384 | 0.654267192 | 0.063971508 | 0.293998331 | 0.334742993 | 0.298371002 | 0.063971508 |
| 1.340760946 | 0.670380473 | 0.065746244 | 0.301626503 | 0.341633037 | 0.305901758 | 0.065746244 |
| 1.375116467 | 0.687558234 | 0.067498371 | 0.310590491 | 0.349045455 | 0.313211724 | 0.067498371 |
| 1.407538533 | 0.703769267 | 0.069027092 | 0.318942696 | 0.357324779 | 0.32010489 | 0.069027092 |
| 1.438248634 | 0.719124317 | 0.070402082 | 0.326023325 | 0.36582005 | 0.327090256 | 0.070402082 |
| 1.46819067 | 0.734095335 | 0.071767822 | 0.332488567 | 0.374174833 | 0.334205754 | 0.071767822 |
| 1.499509096 | 0.749754548 | 0.07332585 | 0.33980979 | 0.383366674 | 0.341504626 | 0.07332585 |
| 1.540471792 | 0.770235896 | 0.075372506 | 0.349851772 | 0.394592196 | 0.350749493 | 0.075372506 |
| 1.614994407 | 0.807497203 | 0.079012312 | 0.367409348 | 0.41312483 | 0.367953375 | 0.079012312 |
| 1.737928629 | 0.868964314 | 0.085052691 | 0.395549312 | 0.443573907 | 0.396162011 | 0.085052691 |
| 1.904156327 | 0.952078164 | 0.093176525 | 0.433316767 | 0.486675173 | 0.434700616 | 0.093176525 |
| 2.106815338 | 1.053407669 | 0.103103362 | 0.479773819 | 0.540493831 | 0.481374785 | 0.103103362 |
| 2.344676256 | 1.172338128 | 0.114760477 | 0.534381136 | 0.603535414 | 0.536117211 | 0.114760477 |
| 2.620070457 | 1.310035229 | 0.128227919 | 0.597789615 | 0.675960377 | 0.599901319 | 0.128227919 |
| 2.936729193 | 1.468364596 | 0.143475577 | 0.670422196 | 0.759274617 | 0.673786484 | 0.143475577 |
| 3.299379587 | 1.649689794 | 0.160609506 | 0.753421783 | 0.854404688 | 0.757826649 | 0.160609506 |
| 3.709805012 | 1.854902506 | 0.179887116 | 0.847123414 | 0.961601585 | 0.851925373 | 0.179887116 |
| 4.163251877 | 2.081625938 | 0.201111861 | 0.950738519 | 1.079637408 | 0.955990896 | 0.201111861 |
| 4.645986557 | 2.322993279 | 0.223661304 | 1.061876148 | 1.204784304 | 1.066417381 | 0.223661304 |
| 5.085809708 | 2.542904854 | 0.244156413 | 1.163476795 | 1.318999261 | 1.166485801 | 0.244156413 |
| 5.393891811 | 2.696945906 | 0.258534878 | 1.234763086 | 1.398598611 | 1.236664087 | 0.258534878 |
| 5.571300983 | 2.785650492 | 0.2669186 | 1.276354641 | 1.4441562 | 1.277090669 | 0.2669186 |
| 5.680055141 | 2.840027571 | 0.272140309 | 1.30196771 | 1.473322064 | 1.301812977 | 0.272140309 |
| 5.765552521 | 2.88277626 | 0.276246309 | 1.321837664 | 1.496594369 | 1.321113348 | 0.276246309 |
| 5.878070354 | 2.939035177 | 0.281469613 | 1.347079754 | 1.525752723 | 1.346696228 | 0.281469613 |
| 6.089773655 | 3.044886827 | 0.290996641 | 1.394488752 | 1.580709398 | 1.394959688 | 0.290996641 |
| 6.335307598 | 3.167653799 | 0.30184193 | 1.450744092 | 1.645266414 | 1.451019406 | 0.30184193 |
| 6.493998528 | 3.246999264 | 0.30912897 | 1.490107834 | 1.689759076 | 1.488552958 | 0.30912897 |
| 6.546561241 | 3.273280621 | 0.311912149 | 1.505006492 | 1.70696938 | 1.502107263 | 0.311912149 |
| 6.565366745 | 3.282683372 | 0.312956974 | 1.509824216 | 1.711952209 | 1.506671131 | 0.312956974 |
| 6.600815773 | 3.300407887 | 0.314778104 | 1.519857287 | 1.72119987 | 1.516269028 | 0.314778104 |
| 6.626036644 | 3.313018322 | 0.316425636 | 1.529294431 | 1.730759025 | 1.524259686 | 0.316425636 |
| 6.683319569 | 3.341659784 | 0.319048047 | 1.540423572 | 1.744546652 | 1.535999238 | 0.319048047 |
| 6.806109905 | 3.403054953 | 0.32438226 | 1.563776612 | 1.772450626 | 1.561397403 | 0.32438226 |
| 6.903719425 | 3.451859713 | 0.328846067 | 1.584682167 | 1.796187043 | 1.583167195 | 0.328846067 |
| 6.959480286 | 3.479740143 | 0.331414402 | 1.598175228 | 1.810433507 | 1.596232623 | 0.331414402 |
| 7.006128788 | 3.503064394 | 0.334049851 | 1.612293541 | 1.825038791 | 1.608807236 | 0.334049851 |
| 7.037926197 | 3.518963099 | 0.33621794 | 1.622285485 | 1.836432874 | 1.617369592 | 0.33621794 |
| 7.121445656 | 3.560722828 | 0.339405343 | 1.637462556 | 1.8555969 | 1.633824736 | 0.339405343 |
| 7.225528717 | 3.612764359 | 0.343638539 | 1.658232808 | 1.880840182 | 1.655715257 | 0.343638539 |
| 7.291322708 | 3.645661354 | 0.346682265 | 1.673517823 | 1.899437726 | 1.670545965 | 0.346682265 |
| 7.337275982 | 3.668637991 | 0.348998085 | 1.687615156 | 1.915119231 | 1.683457136 | 0.348998085 |
| 7.371568203 | 3.685784101 | 0.350762993 | 1.698779583 | 1.927397311 | 1.693961054 | 0.350762993 |
| 7.467813015 | 3.733906507 | 0.35481447 | 1.717363119 | 1.949242711 | 1.714139521 | 0.35481447 |
| 7.59250927 | 3.796254635 | 0.360171065 | 1.742530763 | 1.977857232 | 1.740500718 | 0.360171065 |
| 7.67454195 | 3.837270975 | 0.363715947 | 1.760908902 | 1.998547912 | 1.758704156 | 0.363715947 |
| 7.726121426 | 3.863060713 | 0.366042957 | 1.776056886 | 2.015181363 | 1.772381634 | 0.366042957 |
| 7.762696743 | 3.881348372 | 0.367905155 | 1.786878228 | 2.027232111 | 1.781891108 | 0.367905155 |
| 7.840141773 | 3.920070887 | 0.371387079 | 1.801451147 | 2.044754922 | 1.797962725 | 0.371387079 |
| 7.907234669 | 3.953617334 | 0.374562711 | 1.814438581 | 2.061343491 | 1.812240034 | 0.374562711 |
| 7.95714283 | 3.978571415 | 0.376778826 | 1.826822042 | 2.073230684 | 1.823957503 | 0.376778826 |
| 7.994682789 | 3.997341394 | 0.378653914 | 1.839115918 | 2.083622038 | 1.834155381 | 0.378653914 |
| 8.069202423 | 4.034601212 | 0.381916121 | 1.854584455 | 2.102263927 | 1.850147426 | 0.381916121 |
| 8.170649529 | 4.085324764 | 0.386461854 | 1.874808133 | 2.129544675 | 1.872060061 | 0.386461854 |
| 8.245157242 | 4.122578621 | 0.389870897 | 1.892430127 | 2.151438951 | 1.889279783 | 0.389870897 |
| 8.289680481 | 4.14484024 | 0.392176822 | 1.905990422 | 2.166527033 | 1.901399374 | 0.392176822 |
| 8.34930706 | 4.17465353 | 0.394851685 | 1.919173896 | 2.180282056 | 1.914393902 | 0.394851685 |
| 8.441858292 | 4.220929146 | 0.398664862 | 1.937632263 | 2.201250613 | 1.933233082 | 0.398664862 |
| 8.515063286 | 4.257531643 | 0.4016518 | 1.953821957 | 2.220171988 | 1.949502051 | 0.4016518 |
| 8.560124397 | 4.280062199 | 0.40380694 | 1.967462599 | 2.235163152 | 1.962370038 | 0.40380694 |
| 8.607007027 | 4.303503513 | 0.405980587 | 1.97833848 | 2.247301161 | 1.973227739 | 0.405980587 |
| 8.683480263 | 4.341740131 | 0.409142956 | 1.992730856 | 2.264295101 | 1.988344491 | 0.409142956 |
| 8.75952816 | 4.37976408 | 0.412532896 | 2.009226799 | 2.282101214 | 2.004776657 | 0.412532896 |
| 8.823367119 | 4.411683559 | 0.416003004 | 2.026561022 | 2.299568892 | 2.021232784 | 0.416003004 |
| 8.912871361 | 4.45643568 | 0.420312077 | 2.045983076 | 2.321160376 | 2.041227043 | 0.420312077 |
| 9.02279377 | 4.511396885 | 0.425189823 | 2.068590343 | 2.348004282 | 2.064784765 | 0.425189823 |
| 9.110173225 | 4.555086613 | 0.428950742 | 2.089399755 | 2.371591687 | 2.084848762 | 0.428950742 |
| 9.171841621 | 4.585920811 | 0.43174167 | 2.105832875 | 2.389801323 | 2.100762486 | 0.43174167 |
| 9.25946331 | 4.629731655 | 0.435509443 | 2.12328279 | 2.410577595 | 2.120068371 | 0.435509443 |
| 9.336901665 | 4.668450832 | 0.439132437 | 2.138869464 | 2.431462228 | 2.136817038 | 0.439132437 |
| 9.386381149 | 4.693190575 | 0.441608623 | 2.152731776 | 2.446535051 | 2.149376452 | 0.441608623 |
| 9.439282417 | 4.719641209 | 0.444029972 | 2.166235209 | 2.459796071 | 2.161985993 | 0.444029972 |
| 9.539113045 | 4.769556522 | 0.44805631 | 2.186148345 | 2.483008921 | 2.182844222 | 0.44805631 |
| 9.631885529 | 4.815942764 | 0.452158749 | 2.206118166 | 2.507065415 | 2.203086734 | 0.452158749 |
| 9.698202133 | 4.849101067 | 0.455764055 | 2.223708451 | 2.526646316 | 2.219768524 | 0.455764055 |
| 9.785474777 | 4.892737389 | 0.459856629 | 2.242101252 | 2.54777962 | 2.239572644 | 0.459856629 |
| 9.87905407 | 4.939527035 | 0.463994011 | 2.261585355 | 2.571888328 | 2.260296047 | 0.463994011 |
| 9.938639641 | 4.96931982 | 0.466703624 | 2.278019428 | 2.590527356 | 2.275159657 | 0.466703624 |

*Dokument 7.2 Messresultate Vierpunktbelastung HSLU HEA 140 Träger, Seite 1*

| Kraft (F) [kN] | Kraft (Q) [kN] | Auflager [mm] | (l-a)/2 [mm] | l/2 [mm] | (l+a)/2 [mm] | Auflager [mm] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.988478661 | 4.99423933 | 0.468896061 | 2.29104054 | 2.605150402 | 2.287144303 | 0.468896061 |
| 10.08182335 | 5.040911674 | 0.472513348 | 2.309678495 | 2.627560019 | 2.306842029 | 0.472513348 |
| 10.16870022 | 5.084350109 | 0.476098135 | 2.329522371 | 2.650867164 | 2.326363266 | 0.476098135 |
| 10.22544861 | 5.112724304 | 0.478952125 | 2.344943643 | 2.667558491 | 2.340499997 | 0.478952125 |
| 10.3129921 | 5.156496048 | 0.482767224 | 2.363409877 | 2.688161373 | 2.359408081 | 0.482767224 |
| 10.41011524 | 5.205057621 | 0.48688668 | 2.384786725 | 2.713029623 | 2.380770326 | 0.48688668 |
| 10.47589207 | 5.237946033 | 0.490278035 | 2.402275205 | 2.732821584 | 2.397041261 | 0.490278035 |
| 10.54002476 | 5.270012379 | 0.493344679 | 2.416335464 | 2.748922944 | 2.411548793 | 0.493344679 |
| 10.61320496 | 5.306602478 | 0.496383741 | 2.431465745 | 2.76723206 | 2.427681208 | 0.496383741 |
| 10.66499519 | 5.332497597 | 0.498752013 | 2.445065737 | 2.782786608 | 2.440593362 | 0.498752013 |
| 10.71885681 | 5.359428406 | 0.501200199 | 2.457127929 | 2.796603918 | 2.452755213 | 0.501200199 |
| 10.78934193 | 5.394670963 | 0.504276812 | 2.472237945 | 2.814459801 | 2.467719615 | 0.504276812 |
| 10.8444643 | 5.422232151 | 0.506944746 | 2.487046957 | 2.829696178 | 2.481281936 | 0.506944746 |
| 10.90952682 | 5.454763412 | 0.510067552 | 2.501653433 | 2.845271587 | 2.495689929 | 0.510067552 |
| 11.00051212 | 5.500256062 | 0.514160991 | 2.520940781 | 2.867356539 | 2.514566004 | 0.514160991 |
| 11.06915569 | 5.534577847 | 0.517609447 | 2.537880063 | 2.88529098 | 2.530795932 | 0.517609447 |
| 11.13631821 | 5.568159103 | 0.520630166 | 2.552537084 | 2.901513457 | 2.546130776 | 0.520630166 |
| 11.21798229 | 5.608991146 | 0.523961484 | 2.570234776 | 2.922897577 | 2.564066887 | 0.523961484 |
| 11.28701782 | 5.643508911 | 0.527239203 | 2.586645961 | 2.942117572 | 2.580489218 | 0.527239203 |
| 11.3780098 | 5.689004898 | 0.531083554 | 2.605687857 | 2.964394808 | 2.599865675 | 0.531083554 |
| 11.46910763 | 5.734553814 | 0.534871072 | 2.626246452 | 2.987861753 | 2.619707286 | 0.534871072 |
| 11.53043842 | 5.765219212 | 0.53794539 | 2.640967607 | 3.0035218 | 2.634479463 | 0.53794539 |
| 11.61523247 | 5.807616234 | 0.541570365 | 2.659344912 | 3.024093628 | 2.65334326 | 0.541570365 |
| 11.70428848 | 5.852144241 | 0.545614958 | 2.680612087 | 3.04770577 | 2.673932374 | 0.545614958 |
| 11.78117085 | 5.890585423 | 0.549122691 | 2.698109508 | 3.068058968 | 2.691213429 | 0.549122691 |
| 11.8723278 | 5.936163902 | 0.552869588 | 2.716934919 | 3.091182351 | 2.710858524 | 0.552869588 |
| 12.00725746 | 6.003628731 | 0.558538169 | 2.745960593 | 3.124892592 | 2.74069643 | 0.558538169 |
| 12.14995003 | 6.074975014 | 0.564589024 | 2.77824533 | 3.161563993 | 2.772582889 | 0.564589024 |
| 12.26471806 | 6.132359028 | 0.569517076 | 2.80450809 | 3.19085741 | 2.798887193 | 0.569517076 |
| 12.34968662 | 6.174843311 | 0.573277175 | 2.823998928 | 3.212807894 | 2.818552792 | 0.573277175 |
| 12.41739368 | 6.208696842 | 0.576209635 | 2.8392452 | 3.23078227 | 2.834302962 | 0.576209635 |
| 12.47804165 | 6.239020824 | 0.578778327 | 2.851741552 | 3.246159434 | 2.848295033 | 0.578778327 |
| 12.53715229 | 6.268576145 | 0.581269741 | 2.86448431 | 3.261343718 | 2.862019181 | 0.581269741 |
| 12.59762669 | 6.298813343 | 0.583679587 | 2.878778219 | 3.27795577 | 2.875715375 | 0.583679587 |
| 12.65629959 | 6.328149796 | 0.585971296 | 2.89240253 | 3.294350147 | 2.888775587 | 0.585971296 |
| 12.70853519 | 6.354267597 | 0.588057876 | 2.904152513 | 3.30771935 | 2.900495887 | 0.588057876 |
| 12.75851727 | 6.379258633 | 0.590054959 | 2.915105462 | 3.31967473 | 2.911687732 | 0.590054959 |
| 12.821805 | 6.4109025 | 0.592728347 | 2.928985238 | 3.33582139 | 2.926143169 | 0.592728347 |
| 12.89665604 | 6.448328018 | 0.596133173 | 2.945328236 | 3.355508566 | 2.943047404 | 0.596133173 |
| 12.98865223 | 6.494326115 | 0.600358754 | 2.96555388 | 3.379463434 | 2.963655829 | 0.600358754 |
| 13.10128212 | 6.55064106 | 0.605563939 | 2.990724444 | 3.408283949 | 2.989132524 | 0.605563939 |
| 13.21544838 | 6.60772419 | 0.610752881 | 3.016977668 | 3.437422037 | 3.015339971 | 0.610752881 |
| 13.31068516 | 6.655342579 | 0.615007967 | 3.039467335 | 3.461726189 | 3.037348866 | 0.615007967 |
| 13.38372898 | 6.691864491 | 0.618206203 | 3.057001114 | 3.480804086 | 3.054314375 | 0.618206203 |
| 13.4416914 | 6.720845699 | 0.620616883 | 3.07065773 | 3.496568203 | 3.067837954 | 0.620616883 |
| 13.49331093 | 6.746655464 | 0.622758031 | 3.082894564 | 3.510768652 | 3.080037594 | 0.622758031 |
| 13.54017925 | 6.770089626 | 0.624935061 | 3.094080448 | 3.523524761 | 3.09086144 | 0.624935061 |
| 13.57988453 | 6.789942265 | 0.627116829 | 3.102769136 | 3.534367204 | 3.099242091 | 0.627116829 |
| 13.6234684 | 6.8117342 | 0.629431576 | 3.111918449 | 3.545766354 | 3.108530164 | 0.629431576 |
| 13.67842674 | 6.839213371 | 0.632071584 | 3.124299526 | 3.559653282 | 3.120616794 | 0.632071584 |
| 13.74303913 | 6.871519566 | 0.634930313 | 3.138735652 | 3.575723648 | 3.135262847 | 0.634930313 |
| 13.80829048 | 6.904145241 | 0.637680233 | 3.153477907 | 3.591854811 | 3.149799109 | 0.637680233 |
| 13.86885834 | 6.934429169 | 0.640230417 | 3.166875958 | 3.607160568 | 3.163139701 | 0.640230417 |
| 13.93358612 | 6.96679306 | 0.643193007 | 3.181237698 | 3.62409544 | 3.177464008 | 0.643193007 |
| 14.00692081 | 7.003460407 | 0.646612912 | 3.197952509 | 3.643788099 | 3.19385004 | 0.646612912 |
| 14.08509445 | 7.042547226 | 0.650051057 | 3.215544581 | 3.664663315 | 3.211609244 | 0.650051057 |
| 14.15912437 | 7.079562187 | 0.65317148 | 3.232208729 | 3.684045792 | 3.228973866 | 0.65317148 |
| 14.22699833 | 7.113499165 | 0.656073362 | 3.247537732 | 3.701606989 | 3.244833469 | 0.656073362 |
| 14.28979683 | 7.144898415 | 0.658832163 | 3.261828899 | 3.718066335 | 3.259121537 | 0.658832163 |
| 14.34922791 | 7.174613953 | 0.661436737 | 3.275538683 | 3.73361361 | 3.272525191 | 0.661436737 |
| 14.40555573 | 7.202777863 | 0.664027065 | 3.288333774 | 3.748240232 | 3.28512013 | 0.664027065 |
| 14.45445347 | 7.227226734 | 0.666335642 | 3.299195647 | 3.760915637 | 3.296046257 | 0.666335642 |
| 14.50755787 | 7.253778934 | 0.668699443 | 3.310864568 | 3.774764895 | 3.307724833 | 0.668699443 |
| 14.57225895 | 7.286129475 | 0.671530545 | 3.324917912 | 3.791351676 | 3.322115541 | 0.671530545 |
| 14.64895248 | 7.324476242 | 0.674884975 | 3.342083573 | 3.810780764 | 3.339364052 | 0.674884975 |
| 14.73342514 | 7.36671257 | 0.678600132 | 3.36121881 | 3.832025647 | 3.358340383 | 0.678600132 |
| 14.81267071 | 7.406335354 | 0.682084113 | 3.37927115 | 3.852280378 | 3.376541972 | 0.682084113 |
| 14.87697029 | 7.438485146 | 0.684971273 | 3.393695354 | 3.869245052 | 3.391331553 | 0.684971273 |
| 14.9363575 | 7.468178749 | 0.687722772 | 3.406908274 | 3.884596586 | 3.404618144 | 0.687722772 |
| 14.99920654 | 7.499603271 | 0.690617114 | 3.421378374 | 3.900538087 | 3.419212699 | 0.690617114 |
| 15.06779575 | 7.533897877 | 0.693816632 | 3.43700397 | 3.917912722 | 3.435144663 | 0.693816632 |
| 15.13899136 | 7.569495678 | 0.697129548 | 3.452773809 | 3.936789513 | 3.451059699 | 0.697129548 |
| 15.20546055 | 7.602730274 | 0.700073391 | 3.467870355 | 3.954569459 | 3.465911269 | 0.700073391 |
| 15.26269531 | 7.631347656 | 0.702501744 | 3.480710864 | 3.969725609 | 3.47878325 | 0.702501744 |
| 15.31246376 | 7.65623188 | 0.70457384 | 3.491602182 | 3.983176708 | 3.490121484 | 0.70457384 |
| 15.35911942 | 7.679559708 | 0.706604689 | 3.501823664 | 3.995808363 | 3.501200199 | 0.706604689 |
| 15.40418053 | 7.702090263 | 0.708694339 | 3.511969805 | 4.0081141 | 3.512120843 | 0.708694339 |
| 15.44502068 | 7.722510338 | 0.71063903 | 3.521408439 | 4.019239902 | 3.521708131 | 0.71063903 |
| 15.48833752 | 7.744168758 | 0.712622136 | 3.530815959 | 4.029959083 | 3.531197906 | 0.712622136 |
| 15.53814316 | 7.769071579 | 0.714728206 | 3.54084301 | 4.041838288 | 3.541730285 | 0.714728206 |
| 15.59502983 | 7.797514915 | 0.716942608 | 3.552380562 | 4.055835843 | 3.553782821 | 0.716942608 |
| 15.6506567 | 7.82532835 | 0.719443381 | 3.565238595 | 4.070913434 | 3.566695571 | 0.719443381 |
| 15.70166969 | 7.850834846 | 0.721945256 | 3.577577353 | 4.084691644 | 3.579098105 | 0.721945256 |
| 15.74871922 | 7.874359608 | 0.724131316 | 3.588660121 | 4.097216249 | 3.59036231 | 0.724131316 |
| 15.7949295 | 7.897464752 | 0.726099402 | 3.599443316 | 4.109311819 | 3.601366401 | 0.726099402 |
| 15.8462944 | 7.923147202 | 0.728206903 | 3.611513615 | 4.122422814 | 3.613207698 | 0.728206903 |
| 15.89980888 | 7.949904442 | 0.730412662 | 3.623825192 | 4.135674238 | 3.624872565 | 0.730412662 |
| 15.95174885 | 7.975874424 | 0.732682705 | 3.635455728 | 4.148300409 | 3.636064887 | 0.732682705 |
| 16.00091934 | 8.000459671 | 0.734938741 | 3.646740437 | 4.161172867 | 3.646893382 | 0.734938741 |
| 16.05006409 | 8.025032043 | 0.737043381 | 3.657956123 | 4.174600244 | 3.657562852 | 0.737043381 |
| 16.1029911 | 8.051495552 | 0.739201516 | 3.6697191 | 4.188868165 | 3.669708967 | 0.739201516 |
| 16.15636063 | 8.078180313 | 0.741482586 | 3.681933165 | 4.203292727 | 3.682670236 | 0.741482586 |
| 16.20347595 | 8.101737976 | 0.743560284 | 3.693147779 | 4.215366244 | 3.694039345 | 0.743560284 |
| 16.25966644 | 8.129833221 | 0.745932609 | 3.705784798 | 4.228889704 | 3.706200719 | 0.745932609 |
| 16.33454323 | 8.167271614 | 0.749101907 | 3.722178698 | 4.24758482 | 3.722324729 | 0.749101907 |
| 16.41729164 | 8.208645821 | 0.752666593 | 3.740643382 | 4.26866293 | 3.741053224 | 0.752666593 |
| 16.50001144 | 8.250005722 | 0.756266147 | 3.759308219 | 4.289629817 | 3.759843588 | 0.756266147 |
| 16.5735836 | 8.286791801 | 0.759407312 | 3.776336074 | 4.309158206 | 3.776467443 | 0.759407312 |
| 16.63245964 | 8.31622982 | 0.762030512 | 3.790253043 | 4.325313449 | 3.790085196 | 0.762030512 |
| 16.69260216 | 8.346301079 | 0.764685422 | 3.803580642 | 4.341062665 | 3.803857803 | 0.764685422 |
| 16.76342201 | 8.381711006 | 0.767722487 | 3.818826437 | 4.35854435 | 3.819719672 | 0.767722487 |
| 16.84292984 | 8.42146492 | 0.771096081 | 3.836081743 | 4.377850771 | 3.837069869 | 0.771096081 |
| 16.92371559 | 8.461857796 | 0.77459392 | 3.853883028 | 4.398381591 | 3.854667664 | 0.77459392 |
| 16.99891281 | 8.499456406 | 0.777730912 | 3.870684147 | 4.418004632 | 3.871611238 | 0.777730912 |
| 17.07191277 | 8.535956383 | 0.780611008 | 3.887039185 | 4.437230945 | 3.888552547 | 0.780611008 |
| 17.14287949 | 8.571439743 | 0.7835159 | 3.902983069 | 4.455331683 | 3.904750109 | 0.7835159 |
| 17.20914841 | 8.604574203 | 0.786477745 | 3.917944908 | 4.472929358 | 3.919693708 | 0.786477745 |
| 17.27209091 | 8.636045456 | 0.789290667 | 3.932342649 | 4.489986897 | 3.933932781 | 0.789290667 |
| 17.33003426 | 8.665017128 | 0.791958332 | 3.94579649 | 4.505970001 | 3.946874738 | 0.791958332 |
| 17.38132858 | 8.690664291 | 0.794362903 | 3.957504034 | 4.519956827 | 3.958372474 | 0.794362903 |
| 17.43766975 | 8.718834877 | 0.79697454 | 3.969793081 | 4.534164071 | 3.971264362 | 0.79697454 |
| 17.50841331 | 8.754206657 | 0.800212473 | 3.98510623 | 4.551166177 | 3.987523198 | 0.800212473 |
| 17.58626366 | 8.793131828 | 0.80370146 | 4.002257705 | 4.570290804 | 4.004981995 | 0.80370146 |
| 17.65317917 | 8.826589584 | 0.806721747 | 4.01740396 | 4.587956667 | 4.020279527 | 0.806721747 |
| 17.7086525 | 8.854326248 | 0.80921796 | 4.029826641 | 4.603200555 | 4.033079505 | 0.80921796 |
| 17.77554703 | 8.887773514 | 0.81221512 | 4.044450402 | 4.620519638 | 4.047927141 | 0.81221512 |
| 17.85776138 | 8.928880692 | 0.815828264 | 4.062870145 | 4.641336203 | 4.066303849 | 0.815828264 |
| 17.94397163 | 8.971985817 | 0.819586247 | 4.082589626 | 4.663405418 | 4.085818052 | 0.819586247 |
| 18.02729607 | 9.013648033 | 0.823250175 | 4.10130918 | 4.684247732 | 4.104533672 | 0.823250175 |
| 18.10924149 | 9.054620743 | 0.826757133 | 4.119149446 | 4.704114556 | 4.123031735 | 0.826757133 |
| 18.19893456 | 9.099467278 | 0.830555201 | 4.138462067 | 4.727398396 | 4.143272519 | 0.830555201 |
| 18.30065727 | 9.150328636 | 0.834928095 | 4.160992503 | 4.75410223 | 4.166139364 | 0.834928095 |
| 18.40218735 | 9.201093674 | 0.839262873 | 4.183934689 | 4.780119419 | 4.189212799 | 0.839262873 |
| 18.50899315 | 9.254496574 | 0.843805939 | 4.207605839 | 4.807920933 | 4.213359952 | 0.843805939 |
| 18.62924576 | 9.314622879 | 0.849189073 | 4.234238505 | 4.838704824 | 4.240291953 | 0.849189073 |
| 18.75394821 | 9.376974106 | 0.854748487 | 4.261752486 | 4.870059013 | 4.268064141 | 0.854748487 |
| 18.87331963 | 9.436659813 | 0.859885484 | 4.288001776 | 4.900940657 | 4.294957399 | 0.859885484 |
| 18.98384285 | 9.491921425 | 0.864727378 | 4.312789559 | 4.9290061 | 4.319773316 | 0.864727378 |
| 19.08670616 | 9.543353081 | 0.8693389 | 4.336466312 | 4.955080986 | 4.342883945 | 0.8693389 |

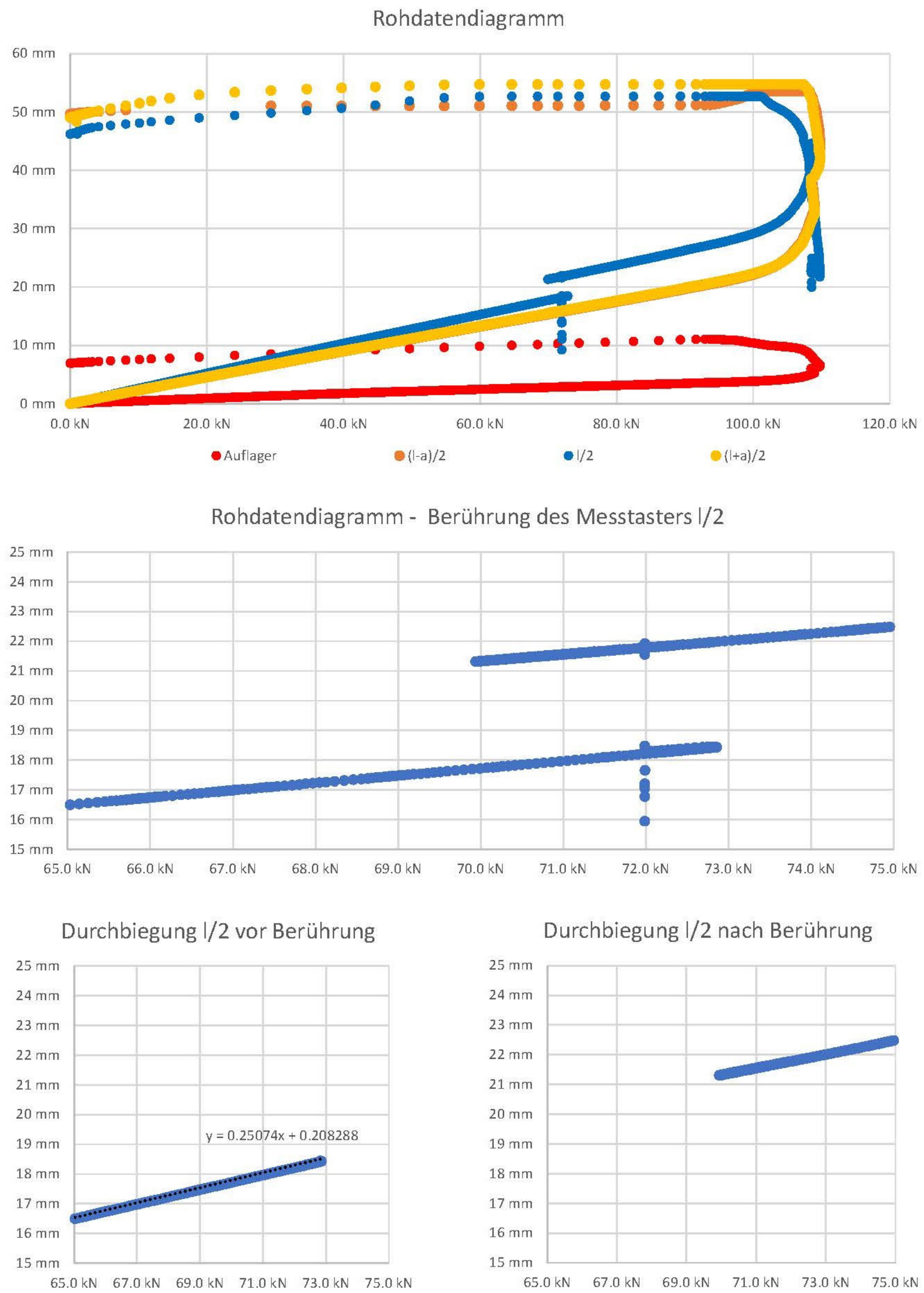
| Kraft (F) [kN] | Kraft (Q) [kN] | Auflager [mm] | (l-a)/2 [mm] | l/2 [mm] | (l+a)/2 [mm] | Auflager [mm] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 19.17290306 | 9.58645153 | 0.873225778 | 4.356837273 | 4.977755308 | 4.36229682 | 0.873225778 |
| 19.24609756 | 9.623048782 | 0.876294315 | 4.374034643 | 4.996587276 | 4.378827214 | 0.876294315 |
| 19.32752228 | 9.663761139 | 0.879549444 | 4.392496109 | 5.017863512 | 4.397295237 | 0.879549444 |
| 19.42103004 | 9.710515022 | 0.883434087 | 4.412939548 | 5.042478323 | 4.418496251 | 0.883434087 |
| 19.51774979 | 9.758874893 | 0.887634933 | 4.434365273 | 5.068227768 | 4.441030025 | 0.887634933 |
| 19.61004448 | 9.80502224 | 0.891706258 | 4.455553532 | 5.093502998 | 4.463109493 | 0.891706258 |
| 19.69149971 | 9.845749855 | 0.895354509 | 4.474827766 | 5.115139008 | 4.482127905 | 0.895354509 |
| 19.75717354 | 9.878586769 | 0.898350239 | 4.490261078 | 5.13199234 | 4.497372627 | 0.898350239 |
| 19.82360649 | 9.911803246 | 0.901257753 | 4.505142689 | 5.147738457 | 4.512694001 | 0.901257753 |
| 19.89848518 | 9.949242592 | 0.904511631 | 4.5219841 | 5.165595055 | 4.529422641 | 0.904511631 |
| 19.97141457 | 9.985707283 | 0.907691926 | 4.538094759 | 5.184798479 | 4.545454741 | 0.907691926 |
| 20.03252411 | 10.01626205 | 0.910284519 | 4.551152945 | 5.201467991 | 4.559196949 | 0.910284519 |
| 20.07617188 | 10.03808594 | 0.912449509 | 4.561524868 | 5.213763952 | 4.569363594 | 0.912449509 |
| 20.12075043 | 10.06037521 | 0.91471374 | 4.572143793 | 5.225287676 | 4.579301238 | 0.91471374 |
| 20.17702675 | 10.08851337 | 0.917268366 | 4.584824085 | 5.239417076 | 4.592126727 | 0.917268366 |
| 20.23639107 | 10.11819553 | 0.919774652 | 4.598413706 | 5.254938126 | 4.605445623 | 0.919774652 |
| 20.2822113 | 10.14110565 | 0.921733737 | 4.609335899 | 5.266994715 | 4.615595102 | 0.921733737 |
| 20.32189369 | 10.16094685 | 0.92344597 | 4.617706776 | 5.277068853 | 4.624513507 | 0.92344597 |
| 20.37446213 | 10.18723106 | 0.925657898 | 4.628514767 | 5.290020227 | 4.636406422 | 0.925657898 |
| 20.4402504 | 10.2201252 | 0.928305894 | 4.643152714 | 5.305411339 | 4.651123524 | 0.928305894 |
| 20.50815964 | 10.25407982 | 0.931023836 | 4.658667326 | 5.321798563 | 4.666499734 | 0.931023836 |
| 20.57366943 | 10.28683472 | 0.93385011 | 4.673669815 | 5.33911252 | 4.681490541 | 0.93385011 |
| 20.63366318 | 10.31683159 | 0.936697841 | 4.687795401 | 5.35625124 | 4.695524335 | 0.936697841 |
| 20.68157005 | 10.34078503 | 0.938994527 | 4.699293613 | 5.369742393 | 4.707315087 | 0.938994527 |
| 20.72925377 | 10.36462688 | 0.941025347 | 4.710253 | 5.38237524 | 4.718196511 | 0.941025347 |
| 20.78617096 | 10.39308548 | 0.943294734 | 4.722705364 | 5.397344828 | 4.730561018 | 0.943294734 |
| 20.85890579 | 10.4294529 | 0.946232438 | 4.738259315 | 5.416008472 | 4.746822596 | 0.946232438 |
| 20.9466095 | 10.47330475 | 0.950010151 | 4.756872892 | 5.43851161 | 4.767032743 | 0.950010151 |
| 21.04454041 | 10.5222702 | 0.954406649 | 4.778195858 | 5.46417141 | 4.789485097 | 0.954406649 |
| 21.14412308 | 10.57206154 | 0.959050387 | 4.800484896 | 5.489472866 | 4.811252356 | 0.959050387 |
| 21.23468399 | 10.617342 | 0.963272095 | 4.820787668 | 5.511705399 | 4.831088781 | 0.963272095 |
| 21.32076836 | 10.66038418 | 0.967101604 | 4.83971858 | 5.533484459 | 4.850112796 | 0.967101604 |
| 21.40725517 | 10.70362759 | 0.970788032 | 4.858245373 | 5.556321859 | 4.86929214 | 0.970788032 |
| 21.48731041 | 10.7436552 | 0.974187851 | 4.875552177 | 5.57755065 | 4.888019085 | 0.974187851 |
| 21.5552845 | 10.77764225 | 0.977109045 | 4.8919487 | 5.595679045 | 4.904016256 | 0.977109045 |
| 21.62269783 | 10.81134892 | 0.979954302 | 4.90828824 | 5.612177372 | 4.91866684 | 0.979954302 |
| 21.70001411 | 10.85000706 | 0.98322472 | 4.926031828 | 5.63074255 | 4.935486555 | 0.98322472 |
| 21.78678703 | 10.89339352 | 0.98719725 | 4.945575714 | 5.652846098 | 4.955038309 | 0.98719725 |
| 21.87809563 | 10.93904781 | 0.991532087 | 4.965885878 | 5.676398039 | 4.975942135 | 0.991532087 |
| 21.96110725 | 10.98055363 | 0.995221615 | 4.984529972 | 5.698159695 | 4.995021343 | 0.995221615 |
| 22.03792572 | 11.01896286 | 0.998441935 | 5.001825094 | 5.718517303 | 5.012588024 | 0.998441935 |
| 22.12193298 | 11.06096649 | 1.002047539 | 5.020154953 | 5.740391254 | 5.031326771 | 1.002047539 |
| 22.21564865 | 11.10782433 | 1.006092191 | 5.040715933 | 5.764163971 | 5.05215621 | 1.006092191 |
| 22.31236649 | 11.15618324 | 1.010184437 | 5.062545776 | 5.788330317 | 5.073955774 | 1.010184437 |
| 22.40277481 | 11.20138741 | 1.013991654 | 5.082980633 | 5.811598301 | 5.094623327 | 1.013991654 |
| 22.50769424 | 11.25384712 | 1.018492341 | 5.105738878 | 5.838489294 | 5.118074179 | 1.018492341 |
| 22.63194275 | 11.31597137 | 1.023901999 | 5.133046389 | 5.870511055 | 5.145547152 | 1.023901999 |
| 22.756567 | 11.3782835 | 1.029282302 | 5.161302567 | 5.902639627 | 5.173564434 | 1.029282302 |
| 22.86709404 | 11.43354702 | 1.033802807 | 5.187168837 | 5.931693792 | 5.198684692 | 1.033802807 |
| 22.96080399 | 11.48040199 | 1.037426412 | 5.208900928 | 5.956638813 | 5.220178366 | 1.037426412 |
| 23.04528618 | 11.52264309 | 1.040782809 | 5.228276014 | 5.978661299 | 5.239661217 | 1.040782809 |
| 23.13215637 | 11.56607819 | 1.044388592 | 5.247453928 | 6.000606775 | 5.25933218 | 1.044388592 |
| 23.22630692 | 11.61315346 | 1.048481345 | 5.268204689 | 6.024731636 | 5.280591011 | 1.048481345 |
| 23.31856537 | 11.65928268 | 1.052481592 | 5.288873196 | 6.048409224 | 5.301202059 | 1.052481592 |
| 23.39903641 | 11.6995182 | 1.055916011 | 5.306918383 | 6.069267035 | 5.318787098 | 1.055916011 |
| 23.47122574 | 11.73561287 | 1.058913589 | 5.323067427 | 6.08779335 | 5.334091663 | 1.058913589 |
| 23.54548645 | 11.77274323 | 1.062068045 | 5.339727163 | 6.10690999 | 5.350056887 | 1.062068045 |
| 23.63394928 | 11.81697464 | 1.065989912 | 5.35924387 | 6.129827261 | 5.370391369 | 1.065989912 |
| 23.73144913 | 11.86572456 | 1.070415676 | 5.380728245 | 6.155002832 | 5.392952442 | 1.070415676 |
| 23.83087158 | 11.91543579 | 1.074912965 | 5.403313875 | 6.180891514 | 5.415536642 | 1.074912965 |
| 23.91963196 | 11.95981598 | 1.078947186 | 5.423945665 | 6.204754829 | 5.43569684 | 1.078947186 |
| 23.9941864 | 11.9970932 | 1.082291484 | 5.441124201 | 6.224209547 | 5.453111649 | 1.082291484 |
| 24.06843185 | 12.03421593 | 1.085732222 | 5.457412004 | 6.243575096 | 5.47113657 | 1.085732222 |
| 24.16115761 | 12.0805788 | 1.089976072 | 5.47757864 | 6.267710209 | 5.492834091 | 1.089976072 |
| 24.25905418 | 12.12952709 | 1.094113708 | 5.499743462 | 6.292981148 | 5.515069962 | 1.094113708 |
| 24.334198 | 12.167099 | 1.097153187 | 5.517709017 | 6.312883854 | 5.532294035 | 1.097153187 |
| 24.39154816 | 12.19577408 | 1.099525034 | 5.531550646 | 6.328031301 | 5.545440197 | 1.099525034 |
| 24.45705414 | 12.22852707 | 1.102423966 | 5.5459795 | 6.344370604 | 5.559905052 | 1.102423966 |
| 24.53839302 | 12.26919651 | 1.106077552 | 5.563663721 | 6.364423752 | 5.578076363 | 1.106077552 |
| 24.62562561 | 12.31281281 | 1.109879792 | 5.58303833 | 6.386071444 | 5.597949266 | 1.109879792 |
| 24.71375084 | 12.35687542 | 1.113515139 | 5.60243988 | 6.40866518 | 5.617744207 | 1.113515139 |
| 24.79949379 | 12.39974689 | 1.116825342 | 5.620912313 | 6.430332661 | 5.636314869 | 1.116825342 |
| 24.8797226 | 12.4398613 | 1.120138228 | 5.638751268 | 6.450660944 | 5.653985262 | 1.120138228 |
| 24.95958328 | 12.47979164 | 1.123891056 | 5.657178402 | 6.472071886 | 5.672521114 | 1.123891056 |
| 25.04471779 | 12.52235889 | 1.127935052 | 5.676917791 | 6.495471001 | 5.691728115 | 1.127935052 |
| 25.12916565 | 12.56458282 | 1.131741226 | 5.696267605 | 6.518015385 | 5.710406065 | 1.131741226 |
| 25.20490646 | 12.60245323 | 1.134937763 | 5.713469744 | 6.537231922 | 5.727451563 | 1.134937763 |
| 25.28030777 | 12.64015388 | 1.137963057 | 5.729808569 | 6.556289196 | 5.744580269 | 1.137963057 |
| 25.3610096 | 12.6805048 | 1.141149342 | 5.747584343 | 6.577103615 | 5.763218164 | 1.141149342 |
| 25.44060898 | 12.72030449 | 1.14449954 | 5.765862703 | 6.597972631 | 5.78161478 | 1.14449954 |
| 25.51925468 | 12.75962734 | 1.147930503 | 5.783774376 | 6.617947578 | 5.799344778 | 1.147930503 |
| 25.60305023 | 12.80152512 | 1.151362538 | 5.802357674 | 6.639042616 | 5.818207741 | 1.151362538 |
| 25.6853714 | 12.8426857 | 1.154685795 | 5.820335627 | 6.659890175 | 5.836944103 | 1.154685795 |
| 25.78034592 | 12.89017296 | 1.158757567 | 5.840873718 | 6.684570551 | 5.858320475 | 1.158757567 |
| 25.90176201 | 12.950881 | 1.164309144 | 5.867415428 | 6.715940952 | 5.885181189 | 1.164309144 |
| 26.02980995 | 13.01490498 | 1.170144916 | 5.895994663 | 6.74887681 | 5.913628101 | 1.170144916 |
| 26.13333321 | 13.0666666 | 1.174649239 | 5.919885874 | 6.775485992 | 5.936959028 | 1.174649239 |
| 26.22307968 | 13.11153984 | 1.178203881 | 5.939911842 | 6.797820091 | 5.956939459 | 1.178203881 |
| 26.32242966 | 13.16121483 | 1.182077646 | 5.961824179 | 6.821748257 | 5.979095221 | 1.182077646 |
| 26.42613602 | 13.21306801 | 1.186349452 | 5.985158682 | 6.847214699 | 6.002703905 | 1.186349452 |
| 26.52580261 | 13.26290131 | 1.190757751 | 6.007360935 | 6.873026609 | 6.025341034 | 1.190757751 |
| 26.61908722 | 13.30954361 | 1.195023358 | 6.028149128 | 6.897191525 | 6.046213627 | 1.195023358 |
| 26.7097187 | 13.35485935 | 1.199193597 | 6.048456907 | 6.920457363 | 6.066451073 | 1.199193597 |
| 26.79462624 | 13.39731312 | 1.203150749 | 6.06784749 | 6.943085909 | 6.08570981 | 1.203150749 |
| 26.86994362 | 13.43497181 | 1.206505775 | 6.085027456 | 6.964018106 | 6.102740765 | 1.206505775 |
| 26.94686127 | 13.47343063 | 1.209651172 | 6.102665424 | 6.98554635 | 6.11997366 | 1.209651172 |
| 27.02916336 | 13.51458168 | 1.213029563 | 6.121194839 | 7.007785082 | 6.138447046 | 1.213029563 |
| 27.11427307 | 13.55713654 | 1.216644824 | 6.139986992 | 7.029938221 | 6.15771699 | 1.216644824 |
| 27.19881439 | 13.5994072 | 1.220333815 | 6.158969164 | 7.051955462 | 6.176763296 | 1.220333815 |
| 27.28102875 | 13.64051437 | 1.224148452 | 6.177506685 | 7.073310375 | 6.195387602 | 1.224148452 |
| 27.35055351 | 13.67527676 | 1.227261603 | 6.193383932 | 7.090819359 | 6.211292744 | 1.227261603 |
| 27.41330338 | 13.70665169 | 1.229696751 | 6.207437992 | 7.106321573 | 6.225692511 | 1.229696751 |
| 27.47991943 | 13.73995972 | 1.232188761 | 6.222027063 | 7.122548103 | 6.240680218 | 1.232188761 |
| 27.54875565 | 13.77437782 | 1.234930396 | 6.23720336 | 7.139511347 | 6.256136417 | 1.234930396 |
| 27.61706161 | 13.80853081 | 1.237809241 | 6.252476215 | 7.157036781 | 6.271458149 | 1.237809241 |
| 27.67914772 | 13.83957386 | 1.240657806 | 6.266807079 | 7.1737082 | 6.285437107 | 1.240657806 |
| 27.73421669 | 13.86710835 | 1.243107557 | 6.279482365 | 7.188021421 | 6.298084497 | 1.243107557 |
| 27.79934692 | 13.89967346 | 1.245638728 | 6.29382062 | 7.203816414 | 6.313044786 | 1.245638728 |
| 27.88481712 | 13.94240856 | 1.248881996 | 6.312106371 | 7.225421906 | 6.332433939 | 1.248881996 |
| 27.98340607 | 13.99170303 | 1.25287801 | 6.333844423 | 7.251140594 | 6.354576349 | 1.25287801 |
| 28.08484268 | 14.04242134 | 1.257320583 | 6.356604815 | 7.27845788 | 6.377351046 | 1.257320583 |
| 28.18068504 | 14.09034252 | 1.261760354 | 6.378540754 | 7.304158449 | 6.398831367 | 1.261760354 |
| 28.27200317 | 14.13600159 | 1.265808463 | 6.398666382 | 7.328021288 | 6.419004679 | 1.265808463 |
| 28.36765671 | 14.18382835 | 1.269878328 | 6.418990612 | 7.352213621 | 6.440171957 | 1.269878328 |
| 28.46077919 | 14.2303896 | 1.273832083 | 6.439498663 | 7.376332998 | 6.461277962 | 1.273832083 |
| 28.54530716 | 14.27265358 | 1.277337074 | 6.459095478 | 7.39826107 | 6.480772257 | 1.277337074 |
| 28.62256813 | 14.31128407 | 1.280711651 | 6.477168798 | 7.418128967 | 6.498345375 | 1.280711651 |
| 28.68624115 | 14.34312057 | 1.283595085 | 6.49223423 | 7.434823513 | 6.512802839 | 1.283595085 |
| 28.74081993 | 14.37040997 | 1.285971999 | 6.504702568 | 7.44873476 | 6.524940968 | 1.285971999 |

Die vollständigen Daten sind auf Google Drive unter dem QR-Code oder mit dem Link abrufbar.

https://bit.ly/3V8SuDU

*Dokument 7.3 Messresultate Vierpunktbelastung HSLU HEA 140 Träger, Seite 2*

## 7.6 Rohdatenkorrektur

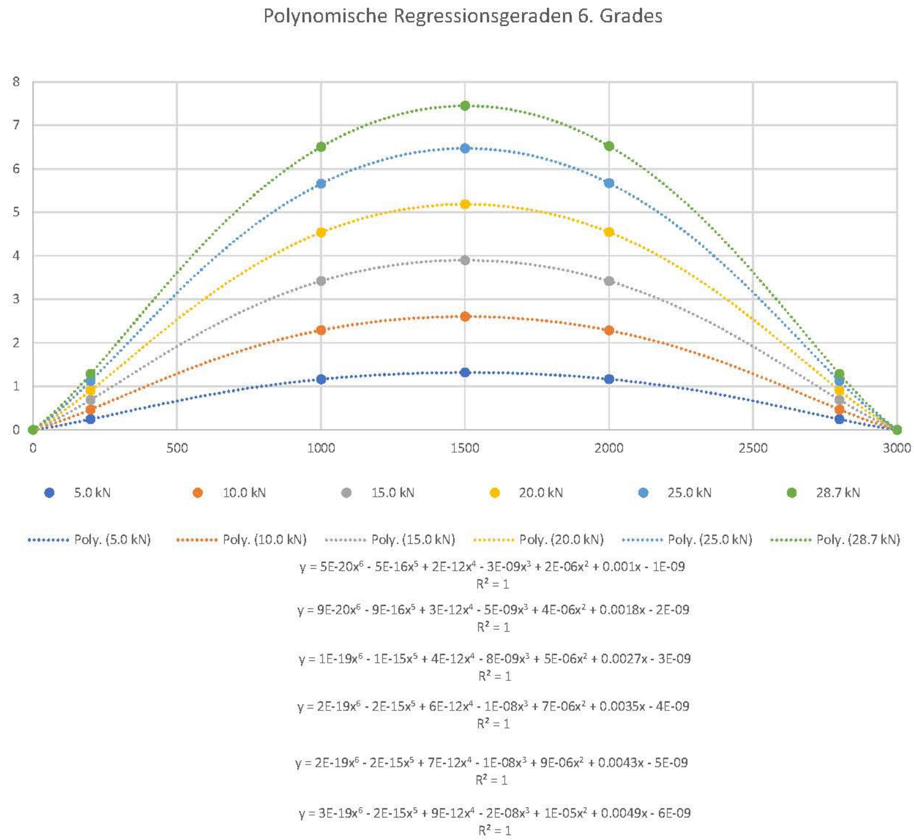



| MW Delta | Stabw. Delta |
|---|---|
| 3.5605 | 0.01406 |

*Dokument 7.4 Rohdatendiagramm und unkorrigierte Messtaster-Berührung*

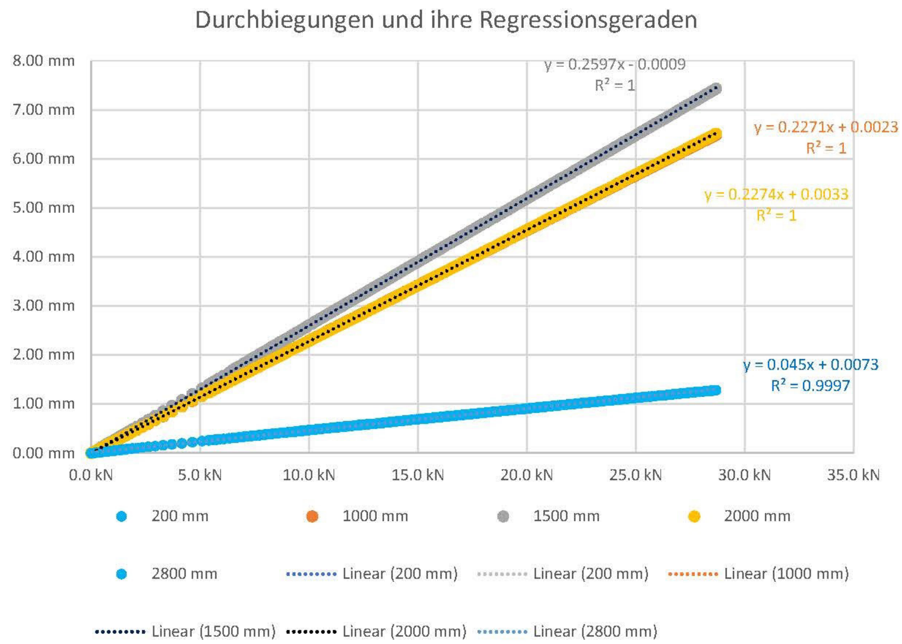
## 7.7 Bestimmung der Regressionsgeraden für die Biegelinienfunktion

| *F gerundet* | F | 0 | 200 | 1000 | 1500 | 2000 | 2800 | 3000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *5.0 kN* | 5.085809708 | 0 | 0.24415641 | 1.16347679 | 1.31899926 | 1.1664858 | 0.24415641 | 0 |
| *10.0 kN* | 9.988478661 | 0 | 0.46889606 | 2.29104054 | 2.6051504 | 2.2871443 | 0.46889606 | 0 |
| *15.0 kN* | 14.99920654 | 0 | 0.69061711 | 3.42137837 | 3.90053809 | 3.4192127 | 0.69061711 | 0 |
| *20.0 kN* | 19.97141457 | 0 | 0.90769193 | 4.53809476 | 5.18479848 | 4.54545474 | 0.90769193 | 0 |
| *25.0 kN* | 24.95958328 | 0 | 1.12389106 | 5.6571784 | 6.47207189 | 5.67252111 | 1.12389106 | 0 |
| *28.7 kN* | 28.74081993 | 0 | 1.285972 | 6.50470257 | 7.44873476 | 6.52494097 | 1.285972 | 0 |




*Dokument 7.5 Bestimmung der Regressionsgeraden für die Biegelinienfunktion*

# 7.8 Lineare Durchbiegungszunahme mit Regressionsgeraden




*Dokument 7.6 Durchbiegungsresultate dargestellt mit linearen Regressionsgeraden*

## 7.9 Bildmaterial Versuch an der HSLU

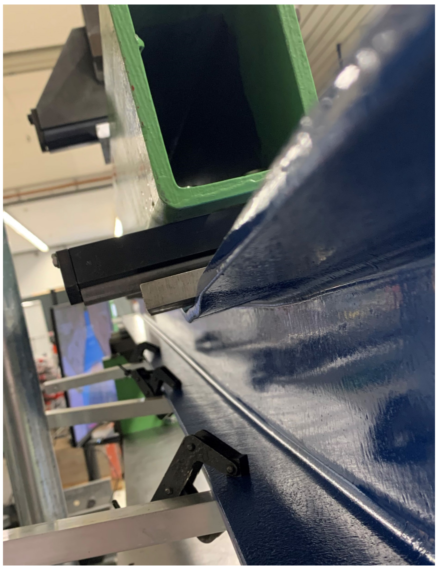


*Abb. 7.7 Versagen des Balkens an Position der Krafteinleitung*


*Abb. 7.8 Übersicht auf Vierpunktbelastungsversuch*

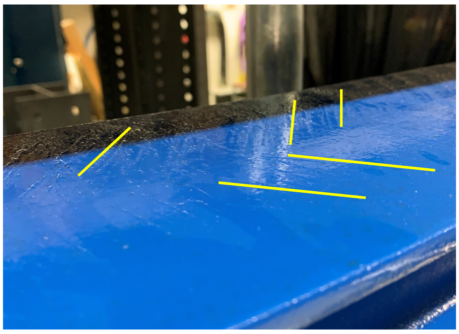


*Abb. 7.9 Erkennbare Dehnung infolge der Spannungen (gelb angedeutet)*

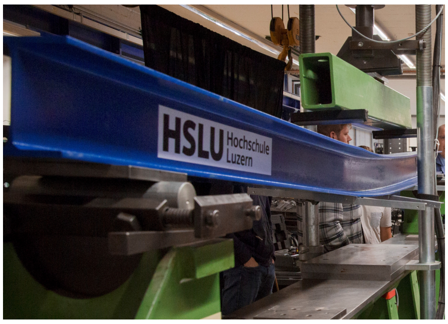
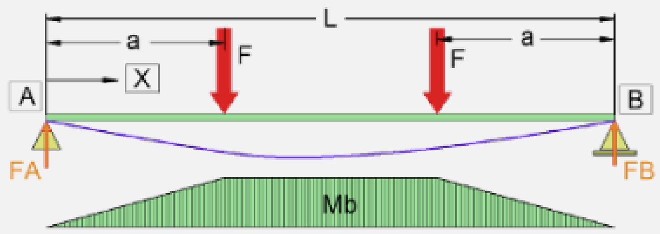



*Abb. 7.10 Plastische Verformung des Balkens ©HSLU*

## 7.10 Online-Tool




*Eingabewerte:*

| | | |
|---|---|---|
| Belastung - F | 12500 | N |
| Länge - L | 3000 | mm |
| Kraftabstand - a | 1000 | mm |
| E-Modul - E | 222000 | N/mm² |
| Trägheitsmoment - I | 10330344 | mm⁴ |
| Widerstandsmoment - W | 155 | cm³ |
| Berechnungspunkt X | 1000 | mm |

Berechnung

*Ergebnisse:*

| | |
|---|---|
| **Auflagerkraft - F (N)** | |
| Koordinate x = 0 mm [FA] | 12500.0 |
| Koordinate x = 3000 mm [FB] | 12500.0 |
| **Biegemoment - M (Nmm)** | |
| Koordinate x = 0.0 mm [A] | 0.0 |
| Koordinate x = 1000 mm | 12 500 000.0 |
| Koordinate x = 3000 mm [B] | 0.0 |
| Max. Biegemoment bei x = 1000.0 mm | 12 500 000.0 |
| **Biegespannung - $\sigma_b$ (N/mm²)** | |
| Koordinate x = 0.0 mm [A] | 0 |
| Koordinate x = 1000 mm | 80.6 |
| Koordinate x = 3000 mm [B] | 0 |
| Max. Biegespannung bei x = 1000.0 mm | 80.6 |
| **Durchbiegung - f (mm)** | |
| Koordinate x = 0.0 mm [A] | 0 |
| Koordinate x = 1000 mm | 4.54 |
| Koordinate x = 3000 mm [B] | 0 |
| Max. Durchbiegung bei x = 1500.0 mm | 5.22 |

*Abb. 7.11 Online-Tool von schweizer-fn.de [27]*

# 8 Deklaration

„Ich erkläre hiermit,

- dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst habe,
- dass ich auf eine eventuelle Mithilfe Dritter in der Arbeit ausdrücklich hinweise,
- dass ich vorgängig die Schulleitung und die betreuende Lehrperson informiere, wenn ich diese Maturaarbeit, bzw. Teile oder Zusammenfassungen davon veröffentlichen werde, oder Kopien dieser Arbeit zur weiteren Verbreitung an Dritte aushändigen werde.“

Ort: Dagmersellen

Datum: 26.03.2022

Unterschrift: