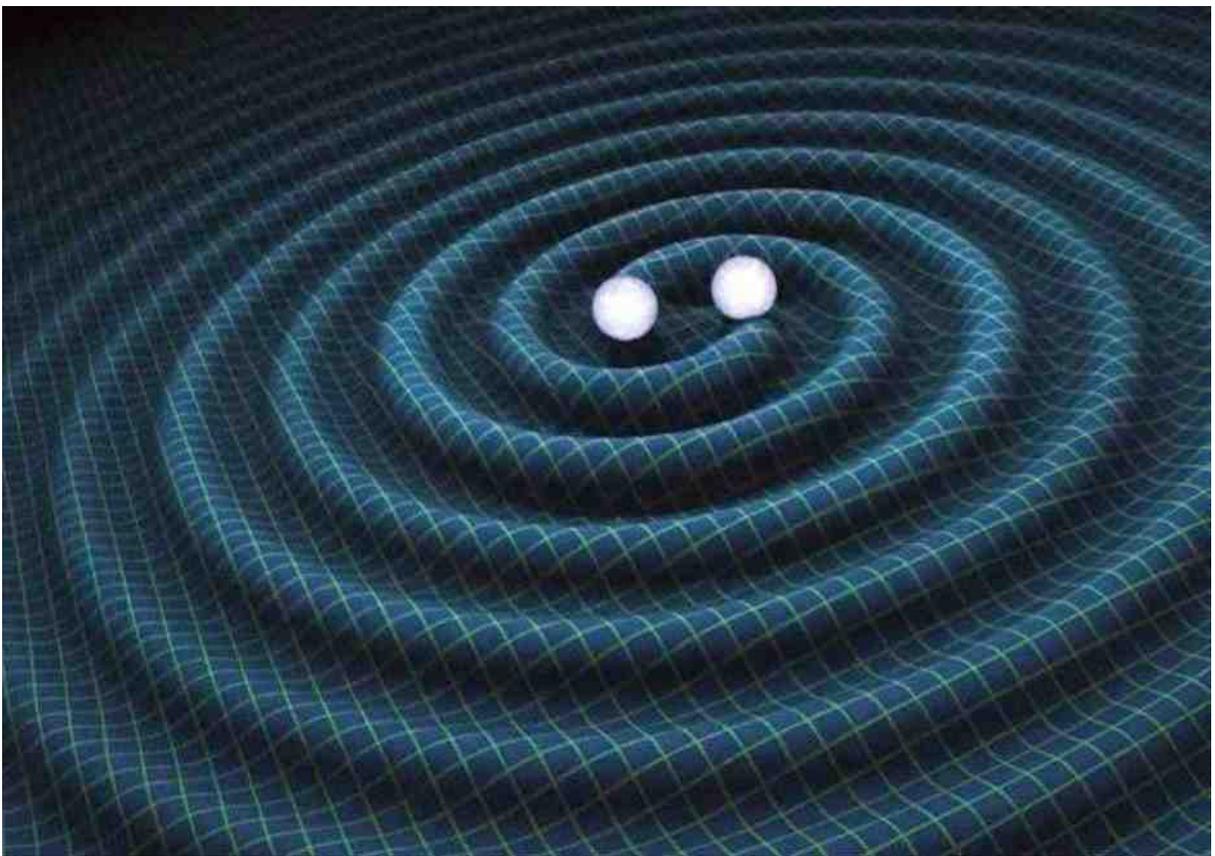


# Theorie und Nachweis von Gravitationswellen

Messdaten von LIGO



Wettbewerbsarbeit von Jerome Schmidiger

1999

Der Kantonsschule Sursee, 2017

Betreuer: Dr. rer. nat. Chiantese Stefano

Daniel Coderre

**Abb. 1 zwei rotierende, massenreiche Objekte, die Masse in Form von Gravitationswellen verlieren,**

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Abstract</b> .....	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>7</b>
<b>2.1</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b> .....	<b>9</b>
2.1.1	Postulate .....	9
2.1.2	Gleichzeitigkeit .....	10
2.1.3	Lorentz-Transformation .....	10
2.1.4	Zeitdilatation.....	12
2.1.5	Längenkontraktion.....	12
2.1.6	Relativistische Dynamik .....	13
<b>2.2</b>	<b>Allgemeine Relativitätstheorie</b> .....	<b>14</b>
2.2.1	Äquivalenzprinzip .....	14
2.2.1.1	Das schwache und starke Äquivalenzprinzip .....	14
2.2.1.2	Das starke Äquivalenzprinzip .....	14
2.2.2	Machsches Prinzip .....	14
2.2.3	Raumzeitkrümmung .....	15
2.2.4	Feldgleichungen.....	15
2.2.5	Gravitationswellen.....	16
2.2.5.1	Allgemein .....	16
2.2.5.2	Wellengleichung .....	16
<b>2.3</b>	<b>Gravitationswellendetektion von LIGO</b> .....	<b>18</b>
2.3.1	Versuchsaufbau .....	18
2.3.2	Datenanalyse .....	21
2.3.2.1	Fourier-Transformation .....	29
2.3.3	Berechnung von Entfernung und Masse mit Ableitung der Frequenz.....	30
2.3.4	Berechnung der Entfernung und der Masse mit der Periodendauer .....	32
<b>2.4</b>	<b>Ergebnisse</b> .....	<b>39</b>
<b>3</b>	<b>Bibliographie</b> .....	<b>42</b>
<b>3.1</b>	<b>Schriftliche Quellen</b> .....	<b>42</b>
<b>3.2</b>	<b>Mündliche Quellen und Notizen</b> .....	<b>43</b>
<b>3.3</b>	<b>Abbildungsverzeichnis</b> .....	<b>43</b>
<b>4</b>	<b>Anhang</b> .....	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>Danksagung</b> .....	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>Deklaration</b> .....	<b>56</b>



## 1 Abstract

Diese Maturaarbeit basiert auf der Neuentdeckung der Gravitationswellen. In dieser Arbeit wird versucht, die am 11.2.2016 neuentdeckten und bewiesenen, von zwei Schwarzen Löchern verursachten Gravitationswellen zu erklären, sowie eine Datenanalyse durchzuführen. In dieser Arbeit wird die Datenanalyse nicht mit dem empfohlenen Programm, welches viel Programmiererfahrung und Zeit braucht durchgeführt, sondern mit Excel. Somit kann diese Datenanalyse von jedem durchgeführt werden. Es wird probiert die Entfernung (Luminosity distance), Masse und Rotationsgeschwindigkeit, wie auch die abgestrahlte Energie (Gravitationswellen) der beiden Schwarzen Löcher zu bestimmen. Für die Masse, Entfernung und Geschwindigkeit werden die Frequenzen der Gravitationswellen gebraucht. Diese Frequenzen erhält man mit Hilfe der Datenanalyse. Das LIGO-Experiment wurde in Livingston, Louisiana und Hanford, Washington durchgeführt. Es wird gezeigt, dass die Gravitationswellen diese Arme des Versuchsaufbaus strecken und stauchen. Diese kleine Raumverzerrung wird *Strain* genannt. Doch diese Raumverzerrung ist extrem klein und der Raum wird nur etwa um die Hälfte eines Protons Durchmessers komprimiert. Für diese Maturaarbeit wird die Spezielle- und die Allgemeine- Relativitätstheorie einleitend erklärt. In der speziellen Relativitätstheorie wird erklärt wie man ein Koordinatensystem transformiert (Lorentz-Transformation). Mit dieser kann bewiesen werden, wenn man sich mit annähernder Lichtgeschwindigkeit bewegt, dass der Raum gestaucht wird und die Zeit langsamer vergeht. Die Allgemeine Relativitätstheorie basiert auf der speziellen Relativitätstheorie. Die Formeln der Speziellen Relativitätstheorie können nur auf konstante und einzelne Objekte angewendet werden. Wobei die Formeln der Allgemeinen Relativitätstheorie auf beschleunigte, wie auch auf ganze Flächen verwendet werden können.



## 2 Einleitung

*„When gravitational waves reach the earth, the waves stretch and squeeze space. This is a tiny stretch and squeeze. Far too small to detect with ordinary human senses.“ [1]*

*Kip Thorne*

*“Spacetime grips mass, telling it how to move...*

*Mass grips spacetime, telling it how to curve.” [2]*

*John Archibald Wheeler*

Diese zwei Zitate erläutern um was es in meiner Arbeit überhaupt geht. Doch um dies zu verstehen, fängt das ganze im 17. Jahrhundert an.

Isaac Newton stellte 1687 in seinem Werk *„Philosophiae Naturalis Principia“* das newtonsche Gravitationsgesetz vor. Albert Einstein der 1915 seine Relativitätstheorie vorstellte, kreierte ein völlig neues Bild der Gravitation. Beim newtonsche Gravitationsgesetz gab es kein Zeitverzug der Anziehungskräfte zwischen zwei Massen, auch wenn sie noch so weit voneinander entfernt waren. Dieses newtonsche Gravitationsgesetz würde aber Einsteins Relativitätstheorie widerlegen, da diese Anziehungskräfte schneller als Licht wären. Einstein sah die Schwerkraft mehr als eine Krümmung von einer Masse, welche den Raum und die Zeit verbog. *„Das Entscheidende: Die Raumzeit lasse sich nicht unendlich schnell verbiegen, sondern nur mit Lichtgeschwindigkeit.“ [3]*

Es war zudem die letzte grosse Idee, die Einstein vorher sagte. Er sagte, dass *die Schwerkraft als Welle durch Raum und Zeit eilt.* [3] Und diese Welle bewegt sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit.

Die Relativitätstheorie wird mit Hilfe von Rechnungen, Beschreibungen wie Zeichnungen erklärt. Die Relativitätstheorie ist nicht, wie in der klassischen Physik, im 3 dimensionalen Raum, sondern im 4 dimensionalen Raum. Der 4 dimensionale Raum wird in den Visualisierungen als 2 dimensionaler Raum, plus eine weitere Dimension Zeit  $t$ , vereinfacht dargestellt. Die Spezielle Relativitätstheorie zeigt auf, dass der Raum und die Zeit zusammenhängen. Die Allgemeine Relativitätstheorie weist auf, dass der Raum die Masse und die Masse den Raum bestimmt.

Die Gravitationswellen werden rechnerisch bewiesen, die Daten werden ausgewertet und analysiert, sowie der Versuchsaufbau erklärt.



## 2.1 Spezielle Relativitätstheorie

### 2.1.1 Postulate

Isaac Newton postulierte einen gleichen und unbeweglichen Raum, welcher absolute Raum genannt wird. Das Galileische Relativitätsprinzip von der klassischen Physik besagt, dass alle Inertialsysteme gleichberechtigt sind. Aus unendlich vielen Inertialsystemen ist es nicht möglich, mit einem mechanischen Experiment, einen absoluten Raum zu ermitteln. Darum verbesserte Einstein dieses Galileische Relativitätsprinzip indem dieses Prinzip nicht nur auf mechanische Gesetze angewendet werden konnte, sondern auf die ganze Natur (physikalischen Gesetze). Einstein erläuterte dies in seinem 1. Postulat.

#### **1. Postulat**

*„Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt. Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.“ [4]*

Ein Inertialsystem ist ein konstant gradliniger bewegender- oder ein ruhender- Raum . Sobald eine Beschleunigung vorliegt, ist es kein Inertialsystem mehr. Das bedeutet in einem konstant bewegendem Raum mit einer Geschwindigkeit von zum Beispiel  $v = 30\text{km/s}$  und einem Raum mit  $v = 0\text{ km/s}$ , gelten die gleichen Naturgesetze.

Man dachte es gäbe auch ein Äther für das Licht. Das Licht breitet sich nur in diesem Äther aus wie die Schallwellen in der Luft. So hätte das Licht unterschiedliche Geschwindigkeiten, da es im absoluten Raum zu anderen Geschwindigkeiten addiert bzw. subtrahiert werden müsste. Durch das Michelson-Experiment wurde die Äthervorstellung wiederlegt und das Licht als Konstante wahr genommen. Man liess ein Lichtstrahl auf einen halbdurchlässigen Spiegel fallen. Dieser Lichtstrahl wurde zwei geteilt, einer verlief parallel zur Bewegungsrichtung, in der die Erde um die Sonne kreist und der Andere rechtwinklig zur Bewegungsrichtung . Laut Isaac Newton müssten sich die Geschwindigkeit der Sonnenumkreisung  $v_E = 30\text{ km/s}$  und die Lichtgeschwindigkeit des parallel laufenden Strahls addieren. Doch der Versuch zeigte, so oft er auch den Versuch um  $90^\circ$  drehte, erhielt er für beide Lichtstrahlen (einer parallel zur Bewegungsrichtung und der andere rechtwinklig zur Bewegungsrichtung) immer die gleiche Zahl. Das Resultat erläuterte schliesslich Einstein in seinem 2. Postulat.

#### **2. Postulat**

*„In allen Inertialsystemen breitet sich Licht im Vakuum isotrop und unabhängig von der momentanen Bewegung der Lichtquelle mit der Geschwindigkeit  $c = 2,99792458 \cdot 10^8\text{ m/s} \approx 300'000\text{ km/s}$  aus.“ [4]*

Das Licht bewegt sich im Vakuum immer gleich schnell, es macht kein Unterschied, ob man  $0.5\text{ c} \approx 150'000\text{ km/s}$  oder  $10\text{ km/h}$  schnell fährt. Würde man es mit der klassischen Physik von Newton rechnen, müsste die Lichtgeschwindigkeit, wenn man  $0,5\text{c} \approx 150'000\text{km/s}$  fährt,  $450'000\text{ km/s}$  betragen:

$$v_c + v_{\text{Inertialsystem}} = 300'000 \text{ km/s} + 150'000 \text{ km/s} = 450'000 \text{ km/s}.$$

Doch laut Einstein beträgt sie immer noch  $\approx 300'000 \text{ km/s}$ . Da das Licht  $c$  eine Konstante ist.

### 2.1.2 Gleichzeitigkeit

Die Gleichzeitigkeit war auch in der klassischen Physik bekannt. Doch wie man zwei Uhren genau synchronisieren konnte war noch unklar. Einstein wusste eine Lösung in der er das konstante Licht verwendete. Genau in der geometrischen Mitte zweier Uhren stellte er ein Licht hin. Wenn bei den Uhren das Lichtsignal ankam, fingen sie an zu zählen. Somit waren beide Uhren synchronisiert. Doch Gleichzeitigkeit wird nicht von allen Beobachtern gleich wahrgenommen. Wir nehmen an ein Beobachter sitzt in der Mitte eines ruhenden Raumschiffs. Ein anderes Raumschiff, mit konstanter Geschwindigkeit, passiert das ruhende Raumschiff. Beim bewegenden Raumschiff blinken gleichzeitig hinten und vorne Lämpchen auf. Ein Beobachter in der geometrischen Mitte des bewegenden Raumschiffs sieht die Lämpchen gleichzeitig blinken. Doch der Beobachter vom ruhenden Raumschiff sieht zuerst das hintere aufblinken und dann erst das vordere, denn das Lämpchen bewegt sich zum ruhenden Beobachter mit Lichtgeschwindigkeit und Bewegungsrichtung hin, wobei sich das vordere Lämpchen wegbewegt und so ein wenig langsamer ist. Somit sehen wir, dass die Zeit nicht in jedem Inertialsystem den gleichen, absoluten Wert hat. [4]

### 2.1.3 Lorentz-Transformation

Mit der Lorentz-Transformation kann man alle Koordinaten von einem Referenzsystem in ein relativ und mit konstanter Geschwindigkeit bewegendes System transformieren. Für die Herleitung der Lorentz-Transformation gehen wir von zwei Formeln aus, die von der Galilei-Transformation kommen. Das Referenzsystem wird in die  $x$ -Richtung transformiert. Das bedeutet, dass  $y$  und  $z$  gleich bleiben. Zwischen  $x$  und  $x'$  wird eine Strecke  $s = vt$  zurückgelegt, daraus folgt [5]:

$$x = x' + vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

Weil es sich um hohe (relativistische) Geschwindigkeiten handelt setzt man einen Faktor ein. Der Faktor muss jedoch bei beiden Fällen der gleiche sein. Der Faktor sollte sich immer mehr der Zahl 1 nähern. Daraus folgt:

$$x = k \cdot (x' + vt')$$

$$x' = k \cdot (x - vt)$$

Der Faktor  $k$  muss die Postulate von Einstein erfüllen. Darum nimmt man zuerst an, dass das System  $A$  und  $A'$  zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  mit ihren Ursprüngen  $O$  und  $O'$  zusammenfallen. Wenn man nun ein Lichtsignal Richtung  $x$ -Achse aussendet, müssen folgende Gleichungen gelten:

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

Setzt man diese zwei Gleichungen in die obenstehenden ein, erhält man das Gleichungssystem:

$$(1) \quad ct = k \cdot (ct' + vt') = k t' \cdot (c + v)$$

$$(2) \quad ct' = k \cdot (ct - vt) = k t \cdot (c - v)$$

Multipliziert:

$$c^2 t t' = k^2 t t' \cdot (c^2 - v^2)$$

Dividiert durch  $t t'$ :

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

Daraus folgt:

$$k = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Der Faktor  $k$  ist der Relativistische Faktor  $\gamma$ . Der Faktor wurde gefunden und die  $x$  Koordinaten sind transformiert. Es muss nur noch die  $t$  Koordinate transformiert werden. Dies wird folgendermassen gemacht. Man setzt das  $x$ ,  $x = k \cdot (x' + vt')$  in die Transformationsgleichung  $x' = k \cdot (x - vt)$  ein, so erhält man die Gleichung:

$$x' = k[k(x' + vt') - vt]$$

Weitere Umformungen ergeben:

$$t = k \cdot \left( \frac{k^2}{k^2} - 1 \cdot \frac{x'}{v} + t' \right)$$

$$t = k \cdot \left[ \left( 1 - 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{x'}{v} + t' \right]$$

$$t = k \cdot \left( t' + \frac{v}{c^2} \cdot x' \right)$$

Daraus folgt:

$$t' = k \cdot \left( t + \frac{v}{c^2} \cdot x \right)$$

Die Transformation ist vollständig, die transformierten Koordinaten sind:

$$\begin{aligned}x' &= k \cdot (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= k \cdot \left(t + \frac{v}{c^2} \cdot x\right)\end{aligned}$$

#### 2.1.4 Zeitdilatation

Die Zeitdilatation kann direkt mit der Lorentz-Transformation erklärt werden. System A und A' besitzen den gleichen  $x_0$  Punkt. Die Zeitdifferenz  $t_2' - t_1'$  wird  $t_{Dif}$  genannt. Es gibt zwei Zeitpunkte:

$$\begin{aligned}t_1 &= k \cdot \left(t_1' + \frac{v}{c^2} \cdot x_0'\right) \\t_2 &= k \cdot \left(t_2' + \frac{v}{c^2} \cdot x_0'\right) \\t_{Dif} &= t_2' - t_1' = \Delta t_{Dif}\end{aligned}$$

Die Zeitdifferenz, die im System A gemessen wurde, zwischen den beiden Ereignissen beträgt:

$$t_2 - t_1 = k \cdot \left(t_2' + \frac{v}{c^2} \cdot x_0'\right) - k \cdot \left(t_1' + \frac{v}{c^2} \cdot x_0'\right) = k \cdot (t_2' - t_1') = k \cdot \Delta t_{Dif}$$

Man sieht, dass das Zeitintervall im bewegten Zustand im Verhältnis zum ruhenden System um den Faktor  $k$  gedehnt wird.

#### 2.1.5 Längenkontraktion

Die Längenkontraktion kann auch direkt mit der Lorentz-Transformation erklärt werden. Die normale Länge eines Stabes in einem Koordinatensystem beträgt  $x_2 - x_1 = l_E$ . Die Enden müssen sich am selben Ort befinden, das bedeutet  $t_1 = t_2$ . Die Enden des Stabs werden folgendermassen transformiert:

$$\begin{aligned}x_1' &= k \cdot (x_1 - vt_1) \\x_2' &= k \cdot (x_2 - vt_2)\end{aligned}$$

Weil  $t_1 = t_2 = t$  erhält man:

$$x_2' - x_1' = k \cdot (x_2 - vt) - k \cdot (x_1 - vt) = k \cdot (x_2 - x_1)$$

Daraus folgt:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{1}{k} \cdot (x_2' - x_1')$$

$$l = \frac{1}{k} \cdot l_E = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot l_E$$

Es resultiert, dass der Stab der sich mit  $v$  bewegt, kürzer ist als der Ruhende Stab. [5]

### 2.1.6 Relativistische Dynamik

Einstein formulierte zwei neue Postulate, welche die Beziehung der Masse und der Energie erläutern sollen. Das erste Postulat lautete:

#### 1. Postulat

„Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  stellt eine obere Grenze für die Geschwindigkeit  $v$  von einem Körper dar.“ [4]

Dieser Satz kann schnell mit einer Rechnung bewiesen werden.

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Wenn  $v > c$  dann gibt es eine negative Zahl unter der Wurzel. Eine negative Zahl unter der Wurzel ist nicht real. Darum ist es unmöglich als Masse schneller als das Licht zu sein. Das zweite Postulat lautete:

#### 2. Postulat

„Energie  $E$  und Masse  $m$  sind gleichwertig. Als Energie-Masse-Äquivalenz gilt  $E = k \cdot m$ .“ [4]

$$k = c^2$$

Dieses Postulat sagt, dass ein Körper nicht nur wegen seiner Bewegung, Energie  $E_{kin}$  besitzt, sondern dass er Ruheenergie besitzt  $E_0 = k m_0$ . Doch mit zunehmender kinetischer Energie nimmt die Masse  $m$  zu. Es sagt auch aus, dass die Masse und die Energie voneinander abhängig sind. Wo es Masse hat, hat es auch Energie.

$$E = mc^2$$

Wobei  $m$  gleich:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die Gesamtmasse beträgt (Energie gesamt = Ruhe Energie + Bewegung Energie):

$$E = E_0 + E_{kin}$$

## 2.2 Allgemeine Relativitätstheorie

### 2.2.1 Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip sagt aus, wie sich beschleunigte Systeme gegenseitig verhalten. Wir nehmen an eine Person steht in einem Kasten der keine Fenster hat. Die Person kann keine Messungen durchführen um herauszufinden, ob er sich auf ein massereiches Objekt bewegt (wie z.B. die Erde), oder ob er sich mit einer bestimmten Beschleunigung nach oben bewegt. Daraus kann gefolgert werden, dass die Gravitation einer Beschleunigung entspricht.

#### 2.2.1.1 Das schwache Äquivalenzprinzip

Das schwache Äquivalenzprinzip sagt die Gleichwertung von träger und schwerer Masse voraus. Dies konnte von der klassischen Physik von Galileo Galilei abgeleitet werden.

#### 2.2.1.2 Das starke Äquivalenzprinzip

Es wird definiert durch:

*„In einem frei fallenden Referenzsystem laufen alle Vorgänge so ab, als ob keine Schwerkraft vorhanden sei. Ein Beobachter in einem solchen System hat also lokal keine Möglichkeit, zu entscheiden, ob er frei fällt oder ob keine Gravitation vorhanden ist.“* [6]

Dieses Gesetz gilt auch anders rum. Wenn ein Beobachter sich mit einem Lift mit der Beschleunigung von  $9.81 \text{ m/s}^2$  in einem gravitationsfreien Raum nach oben bewegt, oder in einem stillstehenden Lift auf welchen eine Gravitation von  $9.81 \text{ m/s}^2$  wirkt, kann nicht sagen ob er sich bewegt oder ob eine Gravitation auf ihn einwirkt. Dieses Gesetz kann aber nur in kleinen Bereichen angewendet werden, da die Gravitation an einem anderen Ort anders ist. Grundsätzlich war Einsteins Prinzip zur allgemeinen Relativitätstheorie punktuelle Gesetze an unendlich vielen kleinen Bereichen anzuwenden. Somit wurde der ganze Raum definiert. [6], [8]

### 2.2.2 Machsches Prinzip

Das Machsches Prinzip wurde von Ernst Mach formuliert. Es sagt aus, dass der Raum kein absoluter Raum sein muss. Da die Zentrifugalkraft jetzt nicht mehr definiert ist, sagt Mach, dass diese als Ursache durch Wölbung einer Rotation um den Fixstern entsteht. Wenn man das ganze umkehrt bleibt es gleich, was heissen muss, dass die Erde auch eine Wölbung besitzt. [7]

## 2.2.3 Raumzeitkrümmung

Die Raumzeitkrümmung ist auf die kommende Gleichung (a) zurückzuführen. Die Metrik des Raums bestimmt, wie sich die Masse bewegen soll, doch die Masse bestimmt, wie sich der Raum krümmen soll. Somit ist diese Gleichung unlösbar. Man kann diese Gleichung theoretisch korrekt nicht lösen, da man nicht weiß, ob man mit der Metrik des Raumes oder mit der Masse anfangen soll.

Grundsätzlich besagt die Raumzeitkrümmung, umso massereicher die Körper oder umso näher an der Lichtgeschwindigkeit beschleunigender Körper ist, desto mehr wird die Raumzeit gekrümmt, was heißt, dass die Zeit umso langsamer vorbeigehen wird. [8]

## 2.2.4 Feldgleichungen

Grundlegend erweitert Einstein hier die spezielle Relativitätstheorie, die nur auf kleine Punkte anwendbar war, nun aber auf den gesamten Raum anwendbar ist. Er definierte den Raum aus unendlich vielen Punkten, bei denen er die spezielle Relativität anwenden konnte. Dazu kam noch die Idee der Raumzeitkrümmung. [22]

Diese Feldgleichung wurde definiert:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (a)$$

Wobei:

**Tab. 1** Beschreibung der Feldgleichung

Beeinflusst die Raumgeometrie	Beeinflusst die Masse
$R_{\mu\nu}$ : Ricci-Krümmungstensor	$T_{\mu\nu}$ : Energie-Impuls-Tensor
$g_{\mu\nu}$ : Metrik (Matrix)	$c$ : Lichtgeschwindigkeit
$R$ : Ricci-Krümmungsskalar	$G$ : Gravitationskonstante
$\Lambda$ : kosmologische Konstante	

Da diese Feldgleichung für diese Arbeit fast irrelevant ist, wird nicht weiter auf sie eingegangen. [8]

## 2.2.5 Gravitationswellen

## 2.2.5.1 Allgemein

Gravitationswellen sind nichts anderes als periodische Änderungen der lokalen Metrik. Massen verlieren Energie in Form von Gravitationswellen, wenn sie rotieren. Die Gravitationswellen haben Polarisierungen. Es gibt 2 Typen (a und b). Die Polarisierungen rotieren um ihren eigenen Mittelpunkt. Die Polarisierung (a) und (b) unterscheiden sich nur um diese 45 Grad. Während die Gravitationswelle in eine Richtung den Raum dehnt, wird er in die andere Richtung gestaucht, da die Gravitationswelle am Anfang ein Kreis ist (Abb. 2). Gravitationswellen wurden von Einstein als unmessbar angesehen, da sie so extrem klein sind. Zugleich war die Entdeckung für Einstein äusserst signifikant, da sonst Anziehung schneller als Licht wäre und Einsteins Theorie als insignifikant angesehen werden kann.

In Abb. 3 sieht man wie sich eine Gravitationswelle, welche von der z-Richtung kommt, auf ein Gummirohr auswirken würde.

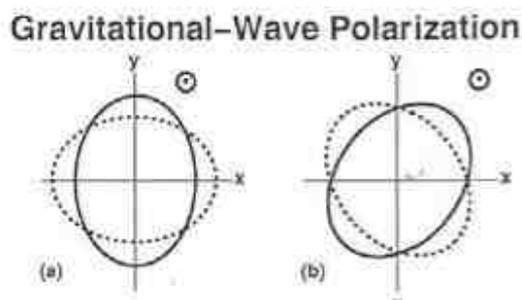


Abb. 2 Polarisation einer Gravitationswelle, [9]

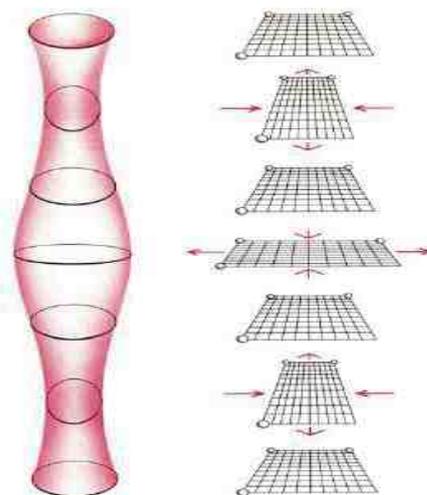


Abb. 3 Einfluss einer Gravitationswelle auf den Raum, [9]

Da man weiss, wie sich eine Gravitationswelle bewegt, kann man die Frequenz, Polarisation und die Amplitude der Gravitationswelle herausfinden. Da aber die Gravitationswellen so extrem klein sind, ist es schwierig diese zu messen. [9]

## 2.2.5.2 Wellengleichung

Eine Welle ist nichts anderes als eine sich im Raum ausbreitende Störung. Zuerst wird die Wellengleichung im 1. Dimensionalen Raum berechnet. Danach umgerechnet in eine 4 dimensionale Wellengleichung und anschliessend wird sie konkret auf die Gravitationswellen angewendet. Eine Welle ist eine Annäherung einer Cosinus Kurve darum folgt daraus, dass sie perio-

disch ist. Wenn man diese um eine beliebige Länge verschiebt, negativ oder positiv, ist diese verschobene Funktion folgendermassen definiert:

$$f_+(x - vt); f_-(x + vt)$$

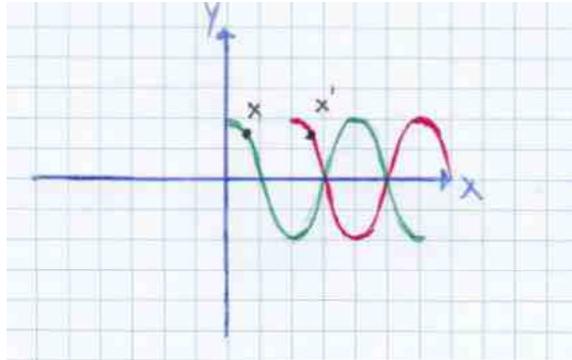


Abb. 4 Verschiebung einer Cosinuskurve

Wird die Funktion  $f_+$  abgeleitet über  $x$ , so resultiert daraus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_+}{\partial x} &= f'(y) \cdot 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f''(y) \end{aligned} \quad (1)$$

Und wenn man  $f_+$  ableitet über  $t$ , so folgt daraus:

$$\frac{\partial f_+}{\partial t} = f'(y)(-v)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f''(y)(v^2) \quad (2)$$

Wenn man jetzt das  $v^2$  auf die andere Seite der Gleichung nimmt und Gleichung (1) und (2) gleichsetzt, dann entsteht das Gleichungssystem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{1}{v^2}$$

Umgeformt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Diese Gleichung kann nun noch mit  $y$  und  $z$  der Lichtgeschwindigkeit erweitert und  $f$  durch  $h$  ersetzt werden. Somit wird eine 4 dimensionale Wellengleichung erstellt:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

Daraus folgt, dass:

$$\begin{aligned} \blacksquare h &= 0 \\ \blacksquare &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Die konkrete Anwendung auf die Gravitationswellen wird in diesem Abschnitt gezeigt. [11] Man geht von der Gleichung (a) aus. Da die Raumzeit extrem steif (10 Quadrillionen mal schwerer zu verformen als Gummi) [10] ist und die Gravitationswellen dadurch überaus klein sind, kann man die Metrik definieren als:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Wobei:

$$h_{\mu\nu} \ll 1$$

Um die linearisierte Feldgleichung zu bekommen, muss man  $h_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$  setzen ( $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ ). Daraus folgt dann:

$$\blacksquare h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

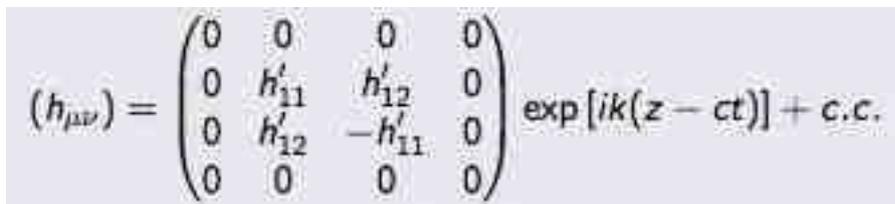
Oder aus  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  folgt auch:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} h^\mu_\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} h^\mu_\mu$$

Wenn man nun die linearisierte Feldgleichung ins Vakuum stellt, fallen  $T_{\mu\nu}$  und  $T$  weg:

$$\blacksquare h_{\mu\nu} = 0$$

Wenn man von der Gleichung  $h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} \exp(-ik_\lambda x^\lambda) + c.c.$  ausgeht, erhält man im Vakuum:



$$(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h'_{11} & h'_{12} & 0 \\ 0 & h'_{12} & -h'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ik(z - ct)] + c.c.$$

Abb. 5 Definition von h mit einer Matrix, [11]

## 2.3 Gravitationswellendetektion von LIGO

### 2.3.1 Versuchsaufbau

Um solche extreme Längenveränderungen überhaupt aufzeichnen zu können, braucht es äußerst genaue Messgeräte. Die Längenveränderungen, die gemessen wurden, waren etwa so gross wie Tausendstel eines Protons ( $10^{-21}$  m). Die Längenveränderungen liegen einer Gravitationswelle zugrunde. Diese Gravitationswellen zu entdecken und somit Einsteins Theorie zu beweisen, haben schon viele Forscherteams probiert. Wie zum Beispiel in Deutschland mit dem Versuch namens GEO 600 oder in Italien namens VIRGO. [9] Doch keiner dieser Versuche detektierte Gravitationswellen. Doch am 15. September 2015 empfing das Forschungszentrum LIGO (Laser Interferometer Gravitation Wave Observatory) ein messbares Signal. Diese Daten wurden dann am 11.2.2016 veröffentlicht. Der Versuch LIGO hat zwei Versuchsanlagen, eine

in Hanford, Washington und die andere in Livingston, Louisiana. [12] Das Signal wurde mit einem Laserinterferometer gemessen. Stark vereinfacht sieht der Laserinterferometer folgendermaßen aus:

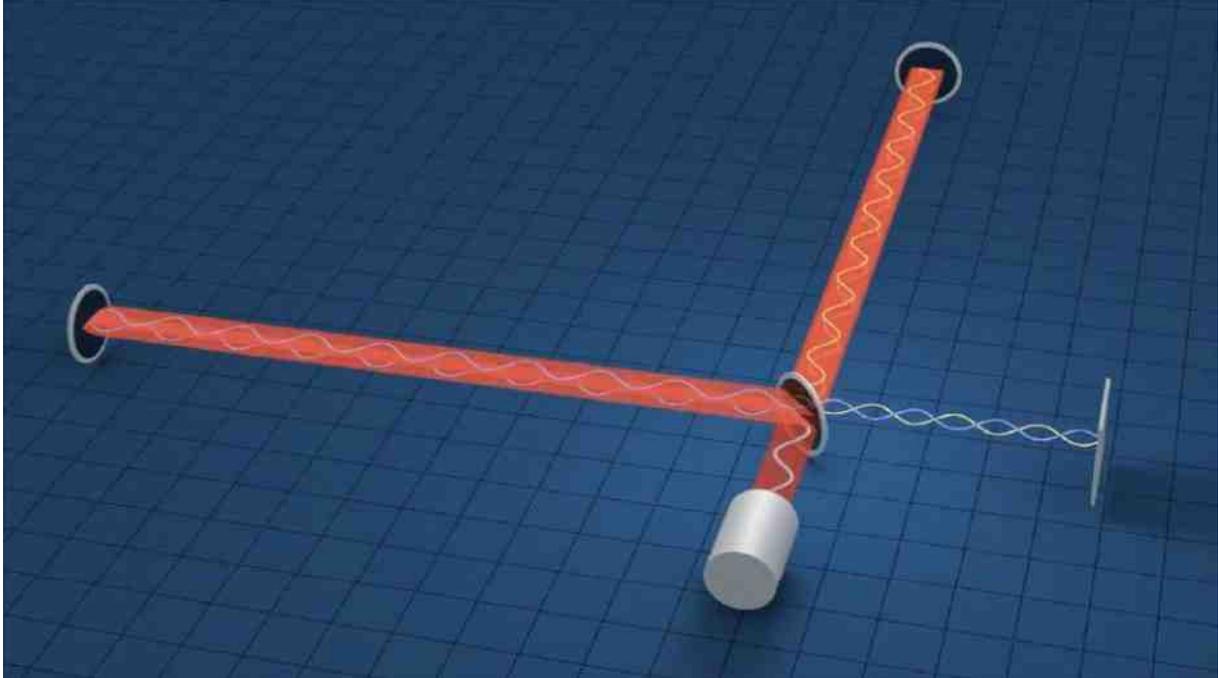


Abb. 6 stark vereinfachter Versuchsaufbau, [assets-jpcust.jwpsrv.com/thumbs/8Lg6YJCI-1280.jpg](https://assets-jpcust.jwpsrv.com/thumbs/8Lg6YJCI-1280.jpg) [20.8.2016]

Das Prinzip dieses Interferometers basiert auf dem Michelson-Experiment (siehe 3.1.1). [4] Es wird ein Lichtsignal zu einem halbdurchlässigen Spiegel geschickt, welcher diesen Strahl gleichzeitig in beide Röhren schickt. Somit ist ein Teil des Lichtstrahls in die x-Richtung gerichtet und ein Teil um 90 Grad verschoben in die y-Richtung. Am Ende dieser Röhren liegen fixierte Spiegel, die von anderen Einwirkungen möglichst abgeschirmt sind. Eine Gravitationswelle, die sich in der z Richtung bewegt, wird eine entgegengesetzte Längenveränderung der 2 Arme verursachen, da die Welle in eine Richtung stauchend und in die andere Richtung streckend wirkt:

$$L_x = \left(1 + \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \omega \cdot t\right) \cdot L$$

$$L_y = \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \cdot \cos \omega \cdot t\right) \cdot L$$

Diese Längenveränderungen führen zu einer Phasenverschiebung der beiden Lichtstrahlen. Wenn die Laufzeit des Lichtsignals im Interferometer viel kleiner als die Periodendauer T der Gravitationswelle ist, ist mit der kommenden Formel die Phasenverschiebung gegeben.

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot (L_x - L_y) = \frac{4\pi L \alpha}{\lambda} \cdot \cos \omega \cdot t$$

Daraus folgt, wenn I = Intensitätsschwankung:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cdot (1 + \cos\delta)$$

Wobei Abbildung 7 die ruhende Ursprungslage ist, Abbildung 8 unter Einfluss einer Gravitationswelle, die den Raum in y-Richtung dehnt und in x-Richtung staucht. Bei Abbildung 9 ist der Raum in y-Richtung gestaucht und in x-Richtung gedehnt. [9]

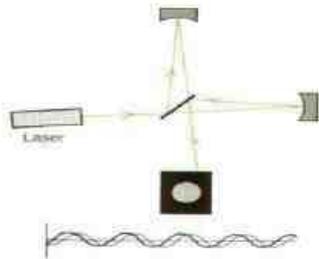


Abb. 7 Ursprungslage, [9]

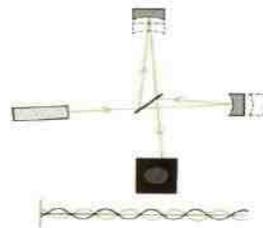


Abb. 8 y-Richtung dehrend, [9]

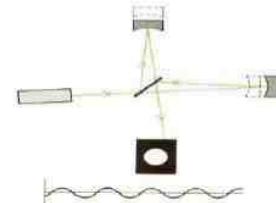


Abb. 9 x-Richtung dehrend, [9]

Bei der Ursprungslage (Abb. 7) sind die zurückfallenden Lichtsignale leicht verschoben, diese werden jedoch mit einer Subtraktion auf 0 ausgeglichen.

$$0 = \delta - k$$

Wobei:

*k = Konstante, damit Gleichung Null ergibt*

Aufgenommene Hintergrundgeräusche [12], welche das Ergebnis beeinträchtigen könnten, werden herausgefiltert. Da die Gravitationswellen extrem klein sind, kann beispielsweise eine Erschütterung durch Schritte, das Ergebnis komplett verfälschen. Diese sogenannten Strain noises sehen folgendermassen aus:

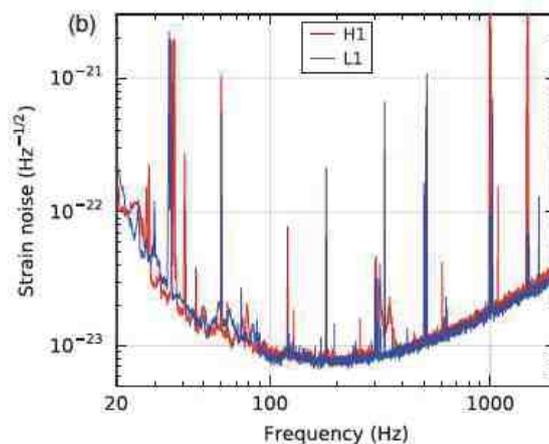


Abb. 10 Hintergrundgeräusche, die herausgefiltert werden, [21]

Grundsätzlich basiert der ganze Versuch auf der Gleichung:

$$\Delta L(t) = \delta L_x - \delta L_y = h(t)L$$

$$h = \frac{\Delta L}{L}$$

Ohne diese Gleichung wäre es nicht möglich diesen Versuch durchzuführen. Sie definiert die Amplitude  $h(t)$  und die Längenveränderung  $\Delta L$ . [12], [20]

### 2.3.2 Datenanalyse

Die Datenanalyse wurde mit Daten vom Detektor in Hanford, Washington (H1) durchgeführt. Auf der offiziellen LIGO Seite [12] wird empfohlen diese mit Python durchzuführen. Doch in meiner Arbeit soll erreicht werden, dass jeder diese einfach und schnell durchführen kann. Deshalb wurde diese Datenanalyse mit Excel erstellt. Die Mathematische Funktion „Fourier-Transformation“ ist bei Excel für Windows ab Version 2010 enthalten wobei diese Transformation bei OS X erst ab Excel Version 2016 verfügbar ist. Folgend werden die Schritte erklärt um diese Datenanalyse mit Excel durchzuführen.

- (1) Als erster Schritt müssen die Zeit- und Raumverzerrung-daten ( $t$  und  $h(t)$ ) ins Excel implementiert werden. Diese Daten, welche bereits einen „Bandpass-Filter“ passiert haben, können kostenlos von der offiziellen Seite [12] kopiert und in ein Textdokument eingefügt werden. [13] Diese werden anschliessend in 2 Spalten eingefügt:

Öffnen>txt Datei auswählen mit kopierten Zeit- und Strain-Daten>Weiter>Leerzeichen anklicken>Weiter>Fertig stellen [24]

Dazu kann noch ein Zeit-Raumzeitverzerrung Diagramm erstellt werden. Die Zeitwerte  $t$  sind die x-Werte und die Raumverzerrungswerte  $h(f)$  sind die y-Werte. Dann erscheint folgendes Diagramm.

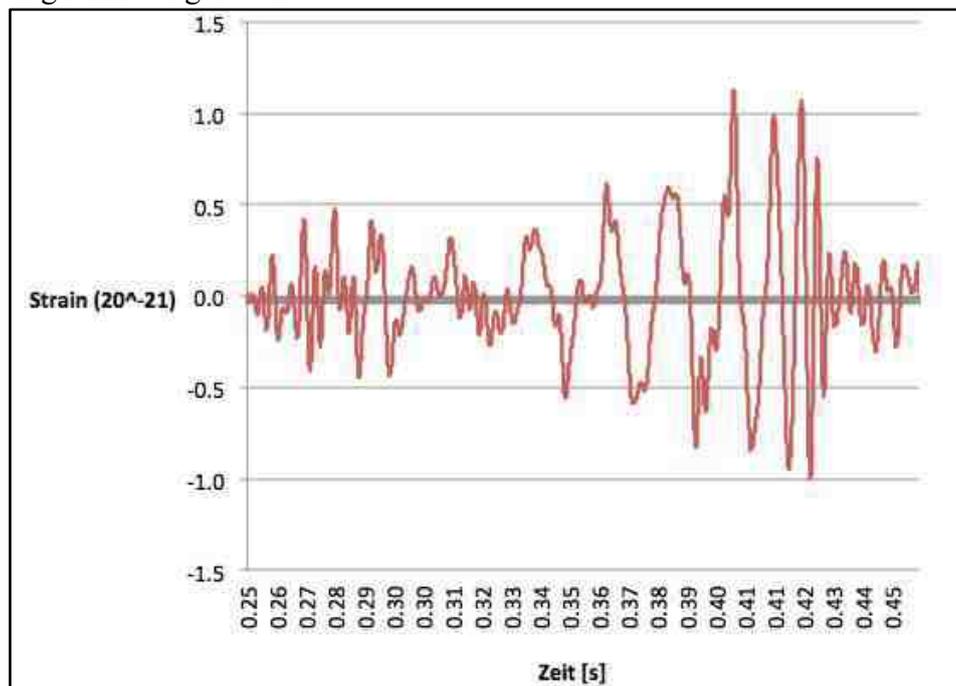


Abb. 11 Strain-Time-Diagramm (Excel)

(2) Als zweiter Schritt müssen 5 Spalten wie gefolgt beschriftet werden:

Zeit [s]	Signal []	komplexe Amplitudenspektrum	absolute Amplitudenspektrum	zugehörige Frequenz
0.250000	0.000000			
0.250061	0.024500			
0.250122	0.015300			
0.250183	0.006370			
0.250244	-0.002080			
0.250305	-0.009890			
0.250366	-0.016900			
0.250427	-0.023000			
0.250488	-0.027900			
0.250549	-0.031800			
0.250610	-0.034400			
0.250671	-0.035900			
0.250732	-0.036300			
0.250793	-0.035900			
0.250854	-0.034600			
0.250916	-0.032800			
0.250977	-0.030600			
0.251038	-0.028000			

Abb. 12 Die 5 Spalten

Die ersten 2 Spalten sind die importierten Werte von der LOSC LIGO Seite. [12], [13] In der 3. Spalte werden anschliessend die Ausgabewerte der Fourier Transformation, welche im Abschnitt 3.3.2.1 rechnerisch erklärt werden, eingefügt. Diese Werte sind jedoch in reale- und imaginäre Zahlen aufgeteilt. Die 4. Spalte sind die absoluten Zahlen der Spalte 3. Diese berechnen sich wie folgt:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wobei:

$$x = \text{Realanteil}$$

$$y = \text{Imaginäranteil}$$

Dies kann mit der Funktion *IMABS()* in Excel berechnet werden. [14] Diese Werte sind die Amplituden, welche aber noch leicht verändert werden müssen. Dies wird jedoch in Schritt 5 erklärt. In der 5. Spalte steht zu jeder Amplitude die zugehörige Frequenz. Wie diese ausgerechnet werden, wird in Schritt 6 beschrieben.

(3) Zunächst müssen die Werte des Signals (2. Spalte) transformiert werden. Dafür müssen die Analyse-Funktionen eingeschaltet sein. Dies kann folgendermassen aktiviert werden: Excel Optionen>Add-Ins>Gehe zu>Analyse-Funktionen hacken setzen. Die Daten werden mit der FFT (Fast-Fourier-Transformation) transformiert. Da es mit der DFT (Discrete-Fourier-Transformation) mehrere Tage dauern würde, wird die FFT verwendet, mit welcher es nur wenige Sekunden dauert. Die FFT kann jedoch nur Daten mit einer 2er Potenz transformieren. In meinem Fall sind es je 3440 Zeit- und Raumverzerrungswerte (Spalte 1 und 2). Die nächst grössere Zahl von 3440 ist 4096 ( $2^{12}$ ). Darum muss man die Zeit-Spalte bis 4096 linear mit dem Wert  $\Delta t^1$  ( $\Delta t = 0.00006103515625s$ )

<sup>1</sup> Jeder Zeitwert von der offiziellen LIGO-Seite ist linear um 0.00006103515625s grösser als der vorherige Zeitwert. Darum kann man die Zeitwerte mit diesem weiterführen.

auffüllen. Die Raumverzerrungswerte (Spalte 2) bis 4096 kann man mit 0 ausfüllen. Danach führt man die Transformation durch, indem man im Menu Daten->Datenanalyse->Fourier Transformation auswählt, die 4096 Raumverzerrungswerte als Eingabe und die Spalte 3 aus Ausgabe wählt. Dies sieht anschliessend folgendermassen aus:

komplexe Amplitudenspektrum	
-5.2507663	
-5.68857177827472+1.49676389101956i	
-6.87480472215632+3.65898303386558i	
-9.29025754540619+5.44855602553391i	
-11.5810915517496+4.65503009279513i	
-13.1919113065989+0.938882405521744i	

Abb. 13 komplexes Amplitudenspektrum

- (4) Wenn die komplexen Zahlen in Spalte 3 vorhanden sind, können mit der *Formel IMABS(Cx)* Werte berechnet werden, welche in der Spalte 4 abgelegt werden.

=IMABS(C4)

C	D
Hz	
komplexe Amplitudenspektrum	absolute Amplitudenspektrum
-5.2507663	5.2507663

Abb. 14 absolutes Amplitudenspektrum

- (5) Als nächstes wird die Amplitude in der Spalte 4 normiert. Da 4096 Zahlen analysiert wurden und die Fourier Transformation symmetrisch ist, sind nur die Zahlen der ersten Hälfte nötig. Darum müssen die Werte durch die *Anzahl analysierte Werte geteilt durch zwei* gerechnet werden. [14] Das heisst  $IMABS(Cx)/(4096/2) = IMABS(Cx)/2048$ :

$$h(f) = \frac{x}{\frac{k}{2}}$$

Wobei:

$$x = \text{Wert der absoluten Zahl}$$

$$k = \text{Anzahl der transformierten Werte}(2^n)$$

$$k = 4096$$

=IMABS(C4)/(2048)

C	D
Hz	
komplexe Amplitudenspektrum	absolute Amplitudenspektrum
-5.2507663	0.002563851

Abb. 15 Normierung des absoluten Amplitudenspektrums

- (6) Als nächster Schritt wird zu jeder Amplitude die zugehörige Frequenz berechnet. Die erste Frequenz muss 0 sein, da die Zeitspanne  $t_{\text{Momentan}} - t_0 = 0$  ist. Für die zugehörige Frequenz braucht man die Abtastrate, mit der das Experiment abgetastet wurde. Die Abtastrate berechnet sich wie folgt:

$$a = \Delta t^{-1}$$

Wobei:

$$a = \text{Abtastrate}$$

$$\Delta t = 0.00006103515625\text{s}$$

Dies wurde von folgender Formel abgeleitet:

$$f = \frac{1}{t}$$

Die Abtastrate beträgt 16'384Hz. Die zugehörige Frequenz wird mit folgender Formel berechnet:

$$f_{\text{zugehörig}} = \frac{a^2}{k} \cdot (t_{\text{Momentan}} - t_0)$$

Wobei:

$$t_0 = \text{konstant}$$

$$t_0 = 0.25\text{s}$$

$$t_{\text{Momentan}} = t_0 + (t_{\text{Alt}} + \Delta t)$$

Das heisst  $t_{\text{Momentan}}$  wird jede Zeile um  $\Delta t$  grösser. [23]

fx = (16384^2)/(4096)*(A4-SA\$4)			
	C	D	E
100 Hz			
		h(f)	
	komplexe Amplitudenspektrum	absolute Amplitudenspektrum	zugehörige Frequenz
100	5.2507663	0.002563851	0.00000
100	-5.68857177827472+1.49676389101956i	0.002872163	4.00000
100	-6.87480472215632+3.65898303386558i	0.003802676	8.00000
170	-9.29025754540619+5.44855602553391i	0.005258851	12.00000

Abb. 16 Die zugehörige Frequenz

- (7) Als nächstes wird ein Frequenz-Amplituden Diagramm erstellt. Dieses Diagramm zeigt auf welche Frequenzen mit welcher Amplitude im Zeit-Raumverzerrungs Diagramm (siehe Abb. 11) vorhanden sind. Da die Fourier-Transformation symmetrisch ist, muss man nur die Hälfte der 4096 transformierten Frequenz- und Amplitudenwerte nehmen. Das heisst 2048. Aber da in diesem Versuch nur Frequenzen von 0-500 Hz vorkommen, kann man auch nur mit je 150 Daten ein Diagramm erstellen. Mit 150 Daten sollte es so aussehen:

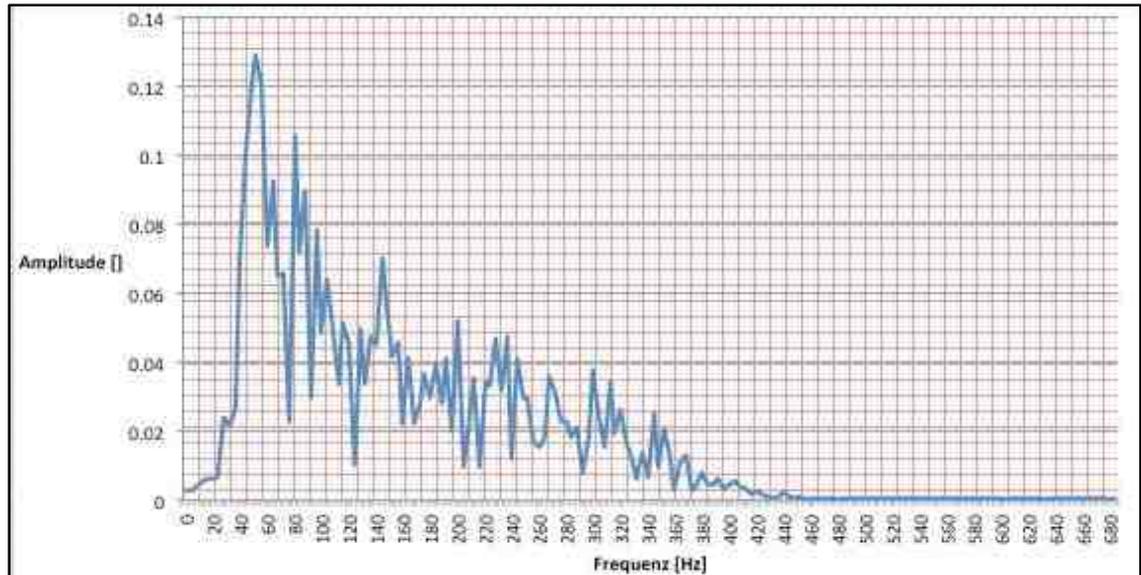


Abb. 17 Amplitudenspektrum, Amplitude in der Abhängigkeit von der Frequenz

Dieses Diagramm zeigt auf, dass die Frequenz 52 Hz die grösste Amplitude hat und dass Frequenzen von 0 bis zirka 460 Hertz vorkommen. Doch das Diagramm hat die Komponente Zeit verloren. Das heisst man weiss nicht zu welchem Zeitabschnitt welche Frequenzen auftreten. Dies ist aber zwingend für die Berechnung der Masse, der Entfernung (Luminosity distance), die und der Rotationsgeschwindigkeit der beiden schwarzen Löcher. Darum muss eine Lösung gefunden werden, in der die Zeitkomponente nicht verloren geht. [14]

Die Lösung für dieses Problem wird in den folgenden Schritten beschrieben. Grundsätzlich macht man diese Fourier-Transformation von möglichst kleinen Zeitbereichen. Damit weiss man, welche Frequenzen und zugehörigen Amplituden in einer bestimmten Zeitspanne vorkommen. Dadurch hat man 3 Komponente was bedeutet, dass ein 3 Dimensionales Diagramm notwendig ist.

- (1) Die Zeitbereiche sind frei zu wählen. Doch um eine möglichst gute Auflösung des 3 Dimensionalen Diagramms zu erhalten, sollte man möglichst viele Daten auf einmal auswerten, doch der Zeitbereich muss möglichst klein bleiben. Es wird empfohlen 512 oder 1024 Daten auf einmal zu transformieren und dann nur die ersten 64 oder 128 Daten zu verwenden, da man in einem möglichst kleinen Bereich die vorkommenden Frequenzen und Amplituden bestimmen will, aber trotzdem eine gute Auflösung (Genauigkeit) der Daten will. In diesem Beispiel werden 512 Werte transformiert und davon immer die ersten 128 Werte verwendet. Die Transformation wird dann um 128 verschoben und wieder mit 512 transformiert. Davon werden wieder nur die ersten 128 Werte verwendet. Dies wird vorgeführt bis man alle Daten analysiert hat. Theoretisch wäre es möglich 1024 Daten zu transformieren und dann immer nur die ersten 32 Werte zu verwenden. Doch wenn man das hochrechnet auf 3440 Werte und immer nur mit einem Schritt von 32 erhöht, müsste man dies zirka  $3440/32 = 108$  mal wiederholen. Die

weissen Balken sind die Werte welche transformiert wurden (512) und die blauen Quadrate ist der verwendete Teil der 512 Daten nämlich 128. [23]

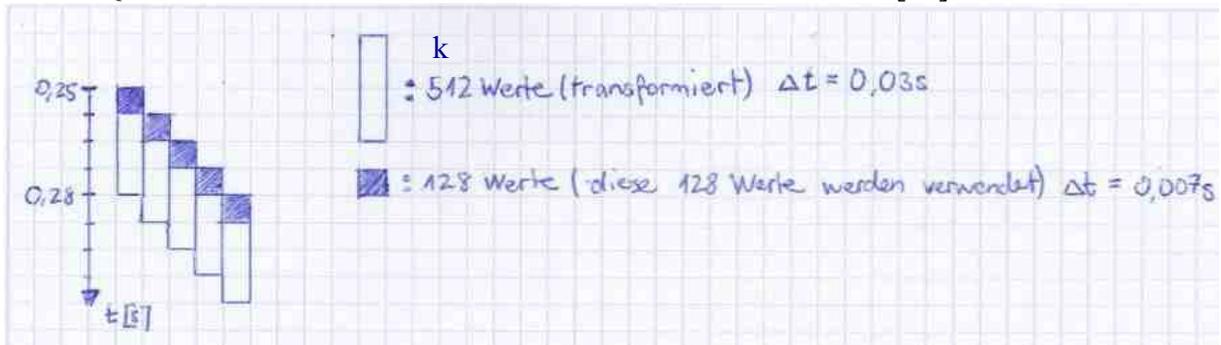


Abb. 18 Verfahren der Datenanalyse mit Zeitabschnitten,

Somit hat man eine 512er Daten Auflösung und einen kleinen Zeitbereich der 128 Daten von zirka  $\Delta t = 0,007s$ . Das Ganze wird immer wiederholt bis alle 3440 mit 128er Schritten transformiert sind.

- (2) Es werden wieder die Strain-Werte transformiert. Die Schritte sind die gleichen wie bei der vorherigen Analyse. Spalten beschriften >Transformieren>komplexe Zahlen zu absolute Zahlen(IMABS())>Normierung( $x/(k/2)$ )>zugehörige Frequenz( $(a^2/k) \cdot (t_M - t_0)$ )

Es sollte zirka so aussehen:

Zeit	Signal	komplexe Amplitudenspektrum	absolute Amplitudenspektrum	zugehörige Frequenz
0.250000	0.000000	0.5633911	0.002200746	0
0.250061	0.024500	12.2136231695434+12.1633378545815i	0.067332622	32
0.250122	0.015300	5.42763317025068+11.8052672692807i	0.050754731	64
0.250183	0.006370	-15.4790940593607+18.7087937836043i	0.094852029	96
0.250244	-0.002080	-5.54304601810333-7.72455663762281i	0.037138996	128
0.250305	-0.009890	1.54281889875683-7.05656294370225i	0.028215828	160
0.250366	-0.016900	-14.4654572417343-13.1635892856332i	0.076399853	192
0.250427	-0.023000	25.483398190593+9.16169705033271i	0.105782251	224
0.250488	-0.027900	-6.517467766301-1.18193276733409i	0.025874108	256
0.250549	-0.031800	17.143249608868-20.4692013112102i	0.104296086	288
0.250610	-0.034400	-5.44592388749249+27.185053626213i	0.108301458	320
0.250671	-0.035900	-8.75282906180138+11.8295641018571i	0.057483041	352
0.250732	-0.036300	-0.98974162382724-1.21340622137594i	0.006116673	384
0.250793	-0.035900	-1.33801779399943-1.24876257526476E-002i	0.00522686	416
0.250854	-0.034600	-0.46476808607722-0.751302169195341i	0.003450933	448
0.250916	-0.032800	-0.735970544474367-0.785506268636476i	0.004204752	480
0.250977	-0.030600	-0.714895388715187-0.410257370058552i	0.003219723	512
0.251038	-0.028000	-0.438148749665755-0.328977987893675i	0.002140257	544
0.251099	-0.025300	-0.250141858237598-0.37112343237011i	0.001748253	576

Abb. 19 Die 5 Spalten ausgefüllt

- (3) Als nächstes muss ein Zahlenmatrix erstellt werden. Dieses wird verwendet für das 3 Dimensionale Diagramm. In diesem Beispiel sind es 26 Zeitbereiche und es gibt Frequenzen von 0Hz - 4096Hz und jede Frequenz eine zugehörige Amplitude hat. Darum wird eine Matrix mit den Zeitbereichen als x-Achse und den Frequenzen als y-Achse verwendet. Die 0Hz Frequenz hat immer eine Amplitude von 0. Doch meistens haben diese 0Hz Frequenzen Amplituden. Doch diese sind kleine Messfehler und Ungenauigkeiten der Versuchsaufzeichnung. Im Mittelbereich sind die Amplituden, welche vorher transformiert, absolutiert und normiert wurden. Diese kann man jetzt von der Berechnung nehmen und richtig einfügen. Die ersten 128 Daten in den 1. Zeitbereich. Die

zweite 128 Daten in den 2. Zeitbereich usw. Es sollte dann so aussehen, wie dieser Ausschnitt:

	0.25	0.2578125	0.265625	0.2734375	0.28125	0.2890625	0.296875	0.3046875
0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0.06733262	0.05350072	0.03204569	0.05336557	0.02641717	0.11034515	0.1146456	0.12983378
64	0.05075473	0.07726002	0.13065456	0.16104669	0.13165974	0.05603062	0.05065975	0.02676409
96	0.09485203	0.13086022	0.18216947	0.17124755	0.17718547	0.13789435	0.06178259	0.02948185
128	0.037139	0.03113938	0.12181042	0.06705366	0.05537578	0.09301387	0.02106744	0.04158155
160	0.02821583	0.07835073	0.01922449	0.06672333	0.03934668	0.02919468	0.07268393	0.04769687
192	0.07639985	0.13284978	0.12175722	0.05882051	0.03862423	0.0649095	0.03379523	0.0414236
224	0.10578225	0.05273228	0.02182453	0.08248425	0.09037885	0.0698847	0.04006382	0.04406515
256	0.02587411	0.06963547	0.06673335	0.05744437	0.05254533	0.02239972	0.03261495	0.02973084
288	0.10429609	0.08022736	0.08148434	0.01694736	0.00408402	0.02439231	0.03263071	0.05294314
320	0.10830146	0.12487244	0.13221183	0.07917446	0.06026621	0.0472667	0.05205929	0.04244649
352	0.05748304	0.06464589	0.06509405	0.06734819	0.0424715	0.01958651	0.02479448	0.01922531
384	0.00611667	0.00894241	0.02411294	0.02938381	0.03894005	0.02582539	0.01415265	0.02125894
416	0.00522686	0.00839469	0.01263871	0.01583809	0.0116878	0.03126551	0.01219379	0.0081102

Abb. 20 Zahlenmatrix, Zeitbereiche, Frequenz und Amplitude

(4) Als nächstes wird das 3 Dimensionale Diagramm erstellt. Dies macht man indem man das komplette Zahlenmatrix (siehe oben) markiert (auch mit Frequenzen und Zeitbereiche). Siehe Ausschnitt:

	0.25	0.2578125	0.265625	0.2734375	0.28125	0.2890625	0.296875	0.3046875	0.3125	0.3203125
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0.06733262	0.05350072	0.03204569	0.05336557	0.02641717	0.11034515	0.1146456	0.12983378	0.21281516	0.21834187
64	0.05075473	0.07726002	0.13065456	0.16104669	0.13165974	0.05603062	0.05065975	0.02676409	0.06191142	0.15573879
96	0.09485203	0.13086022	0.18216947	0.17124755	0.17718547	0.13789435	0.06178259	0.02948185	0.03032142	0.04263636
128	0.037139	0.03113938	0.12181042	0.06705366	0.05537578	0.09301387	0.02106744	0.04158155	0.04772113	0.07975719
160	0.02821583	0.07835073	0.01922449	0.06672333	0.03934668	0.02919468	0.07268393	0.04769687	0.04711969	0.0225113
192	0.07639985	0.13284978	0.12175722	0.05882051	0.03862423	0.0649095	0.03379523	0.0414236	0.02668965	0.06109728
224	0.10578225	0.05273228	0.02182453	0.08248425	0.09037885	0.0698847	0.04006382	0.04406515	0.05512653	0.01540362
256	0.02587411	0.06963547	0.06673335	0.05744437	0.05254533	0.02239972	0.03261495	0.02973084	0.02241796	0.06682484

Abb. 21 Markieren der Zahlenmatrix

Dann soll bei Einfügen>Diagramme>Weitere>Oberfläche>das flache mit Farbe ausgewählt werden. Es sollte folgendermassen aussehen:

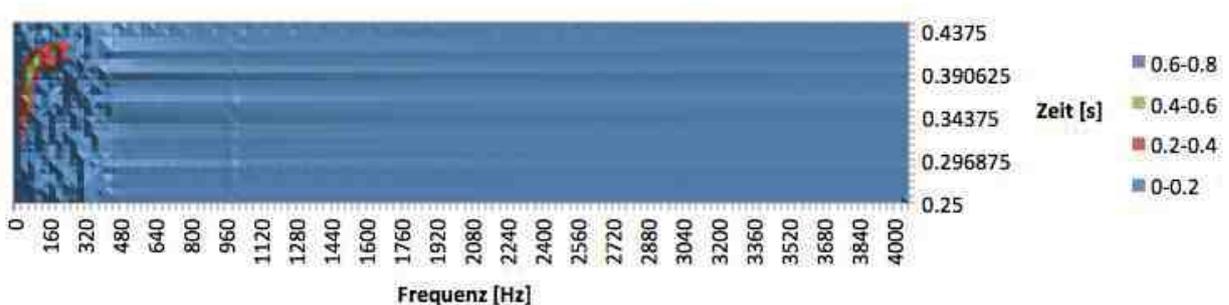


Abb. 22 3D Diagramm mit Frequenzen bis zu 4096 Hz

Da man sieht, dass nur Frequenzen bis zirka 600Hz hohe Amplituden aufweisen, kann man den restlichen Teil abschneiden. Die Zahlen der x Achse sind nummerierte Zeitbereiche mit  $\Delta t = 0,007s$  plus die Startzeit von 0,25s. Durch 3D-Drehung, Farbveränderung der Amplituden und Spiegelung des Diagrammes sieht es folgendermassen aus:

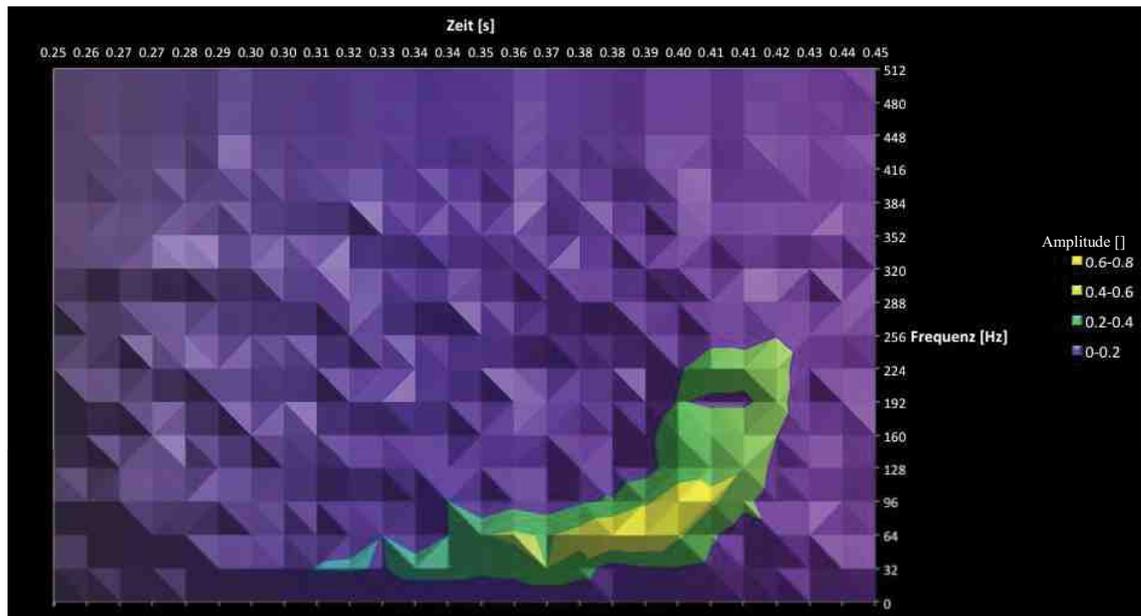


Abb. 23 3D Diagramm mit Frequenzen bis zu 512 Hz und weitere Anpassungen

Im Vergleich mit dem Diagramm, welches auf der offiziellen LIGO Seite ist, hat es eine schlechtere Auflösung und das Referenzsystem ist beim offiziellen Diagramm exponentiell und in diesem Diagramm linear. Doch von der Form und der Grösse stimmt das Diagramm überein. Um die „Normalized amplitude“ zu erhalten, muss die Amplitude mit Faktor zehn multipliziert werden:

$$y(f)_{\text{Normiert}} = y(f)_{\text{alt}} \cdot 10$$

Offizielles LIGO-Diagramm:

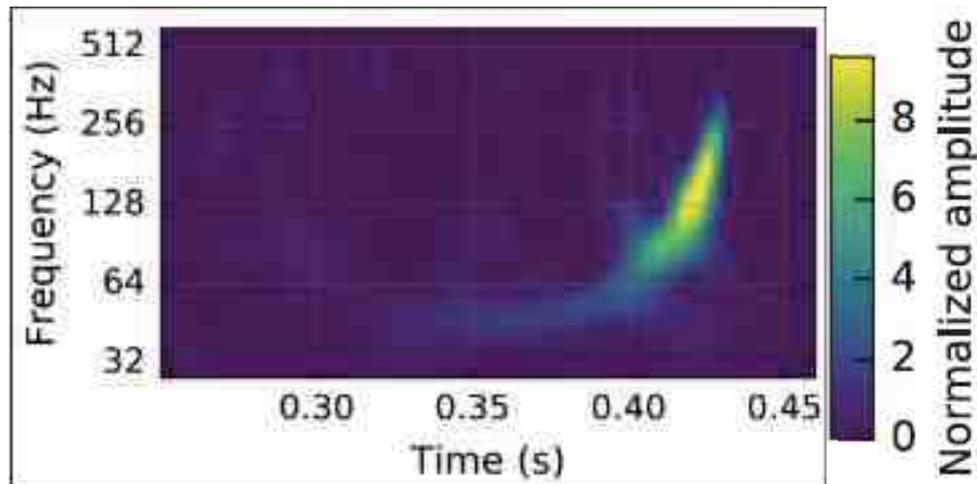


Abb. 24 Offizielles 3D Diagramm von LIGO, [12], [21] (siehe Anhang)

## 2.3.2.1 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation wird verwendet um aperiodische oder kontinuierliche Signale in ein kontinuierliches Spektrum zu zerlegen. Diese macht nichts anderes als eine Längenveränderung in die vorkommenden Frequenzen und deren Amplituden aufzuteilen. In einem immer gleichbleibenden Signal, wie zum Beispiel in einer Sinuskurve, resultiert daraus nur eine dominierende Frequenz im Frequenz-Amplitudenspektrum. Wenn es aber eine aperiodische Funktion ist, resultieren daraus viele Frequenzen.

Es gibt 4 Formen von Fourier Transformationen:

Variante	Definitionsmenge von x	Periodizität von x	Frequenzspektrum
Fourier-Reihe	kontinuierliches Intervall	periodisch	diskret
Kontinuierliche Fourier-Transformation	kontinuierlich	aperiodisch	kontinuierlich
Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	diskret, endlich	aperiodisch, periodisch fortgesetzt	diskret, endlich
Fouriertransformation für zeitdiskrete Signale (DTFT)	diskret, endlich	aperiodisch	kontinuierlich

Abb. 25 Varianten der Fourier-Transformation, Wiki. [de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse](https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse)

In dieser Arbeit wird die Diskrete Fourier-Transformation benötigt, da das Strain-Time Diagramm aperiodisch und *diskret* (Punkte die zu einer Kurve zusammengesetzt werden und deswegen nur eine Annäherung einer Kurve sind) ist. Die DFT braucht extrem viel Leistung und Zeit, um Daten zu transformieren. Darum wird, wie bereits in Abschnitt (3.3.2 Schritt 3) erwähnt, die FFT (Fast Fourier-Transformation) verwendet. [15] Das Grundprinzip der FFT lautet:

*„Man kann die aufwendigen Multiplikationen so aufteilen, dass aus einer DFT eines Signals der Länge k auch zwei DFT's der Länge k/2 gemacht werden können. Diese werden dann in gerade und ungerade aufgeteilt und immer weiter auseinander genommen.“ [14]*

Daraus folgt jedoch, dass die Anzahl der Eingabewerte eine Potenz von 2 sein muss. Wir verwenden die Formel der Diskreten Fourier-Transformation (DFT). [16], [17]

$$f(t) = \sum_{\omega=0}^{N-1} f(\omega) e^{-\frac{i2\pi t\omega}{N}} \quad ; (n = 0..1 : N - 1).$$

Diese wird umgekehrt um das  $f(\omega)$  zu erhalten:

$$f(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{\frac{i2\pi t\omega}{N}} \quad ; (n = 0,1,2 \dots, N - 1).$$

Excel rechnet es jedoch mit der Fast-Fourier-Transformation, da es sonst Tage dauern würde diese Daten zu transformieren.

## 2.3.3 Berechnung von Entfernung und Masse mit Ableitung der Frequenz

Das Frequenzen-Amplituden-Zeit Diagramm ist jetzt vorhanden. Um die Entfernung und die gesamte Masse der beiden schwarzen Löcher herauszufinden, braucht man die Ableitung der Frequenz. In dieser Arbeit wird die Ableitung einer Frequenz mit einer Annäherung zur Exponentiellen Funktion herausgefunden. Dafür werden Punkte des 3D Diagramms verwendet. Für die x Werte werden alle Zeiten der Zeitabschnitte eingesetzt und für die y Werte, werden die Frequenzen verwendet welche im entsprechenden Zeitabschnitt die grösste Amplitude haben. Diese werden in GeoGebra in das Feld Tabelle eingetragen, und eine zugehörige Punkteliste erstellt.

24	0.41	128	(0.41, 128)
25	0.42	192	(0.42, 192)
26	0.43	256	(0.43, 256)
27	0.44	192	(0.44, 192)

Abb. 26 Tabelle in GeoGebra

Danach wird mit der Funktion

$$f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$$

probiert, alle Punkte möglichst genau zu schneiden. Für diesen Schritt könnte die Interpolation verwendet werden, doch aus einer Interpolation folgt eine komplexe Polynomfunktion, wenn die Punkte nicht extrem genau sind. Und diese Polynomfunktion ist suboptimal. Darum wird die Exponentialfunktion, welche den Punkten am nächsten liegt, verwendet. Mit einer Punkteliste können die Punkte implementiert werden. Hier als Beispiel mit 4 Punkten:



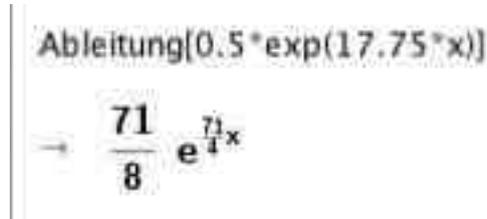
Abb. 27 Punkteliste in GeoGebra mit 4 Punkten

Wenn die Punkte ganz genau wären, könnte man mit diesem Schritt die Interpolation durchführen und würde zum genauen Resultat kommen. Doch sind die Punkte ungenau, so ergibt sich eine suboptimale Polynomfunktion.



Abb. 28 Polynomfunktion der 4 Punkte

Wenn man die Exponentielle Funktion den Punkten möglichst gut angenähert ist, kann die jetzt vorhandene Funktion abgeleitet werden.



Ableitung[0.5 \* exp(17.75 \* x)]  
 $\rightarrow \frac{71}{8} e^{\frac{71}{4}x}$

Abb. 29 Ableitung der exponentiellen Funktion

Jetzt kann ein Punkt der Liste in die Ableitung eingesetzt werden. Von diesem Punkt muss die Frequenz, die Zeit und die Amplitude vorhanden sein.



$= (71 / 8 * \text{EXP}(71/4 * 0.4104))$

Abb. 30 Entsprechende Zeit in Abgeleitete Funktion eingesetzt

Die Ableitung in diesem Beispiel beträgt:

$$f'(128) = 12936,89 \text{ Hz}$$

Wobei:

$$f'(\omega) = \dot{f}$$

Diese abgeleitete Frequenz kann in die Formel zur Berechnung der Entfernung (Luminosity-distance) [20] eingesetzt werden, welche folgendermassen lautet:

$$D = \frac{5}{96\pi^2} \frac{c}{h_0} \frac{\dot{f}}{f^3}$$

Wobei:

$$f = \text{Frequenz [Hz]}$$

$$h_0 = \text{zugehörige Amplitude zu } f [10^{21}]$$

$$\dot{f} = \text{abgeleitete Frequenz von } f [\text{Hz}]$$

Das Resultat muss von Meter [m] in MegaParSec [Mpc] umgerechnet werden. Dies ist ein Faktor von:

$$u = 3.24 \cdot 10^{-23}$$

Zeit (s)	h0 ( )	Frequenz (Hz)	Abgeleitete Frequenz (Hz)	Distanz (m)	Distanz (Mpc)	
0.4104	9.17E-22	128	12936.89176	1.06429E+25	344.92	
Zeit[s]	Frequenz[Hz]	ableitung tangente	Teilrechnung	Masse[kg]	ableitung tangente werte	Masse[Solar]
0.414246	128	-3.11825E+18		7.44571E+31	12936.89176	37.45325636

Abb. 31 Berechnung der Luminosity distance und der chirp mass mit Excel

Wenn man das Resultat mit der offiziellen, von LIGO [12] berechneten, Luminosity distance vergleicht, sieht man, dass das Resultat im Abweichungsrahmen liegt. Das Resultat sollte zwischen 230 Mpc und 570 Mpc liegen, was es auch erfüllt. Die chirp mass zirka 30 Solarmassen.

Jedoch muss die chirp mass noch mit dem Redshift-faktor von 1.12 dividiert werden. Warum das so ist wird im nächsten Kapitel erklärt.

**Fazit:** Die Werte sind nicht genug genau mit Excel transformiert worden, da 128er Schritte zu grosse Zeitbereiche sind. Wenn diese Daten ungenau sind, kann die Ableitung nicht mit einer Interpolation durchgeführt werden. Deshalb muss eine exponentielle Funktion gefunden werden welche diese Punkte ungefähr beinhaltet. Da die Berechnung mit Excel als ungenau und kompliziert betrachtet werden kann, kann die Entfernung und die Masse mithilfe der Periode der Welle und der Periode des Orbits berechnen. Dies wird in 3.3.4 *Berechnung von Entfernung und Masse mit der Periodendauer* gezeigt.

### 2.3.4 Berechnung der Entfernung und der Masse mit der Periodendauer

Die Grundidee dieses Prinzips ist: Man verwendet immer periodische Abschnitte des Raumverzerrungs-Zeit Diagramms (Abb. 11) und findet in jedem Abschnitt die Periode, Frequenz und Amplitude (Raumverzerrung = Strain) heraus und berechnet mit einsetzen und umformen die Distanz und die chirp Mass (theoretische Masse). [19] Die Ableitung der Frequenz  $\dot{f}$  wurde mit der Variante von Abschnitt 3.3.3 mit einer zu grossen Ungenauigkeit berechnet. Darum wird hier  $\dot{f}$  nicht als Wert verwendet, sondern nur die umgeformte Gleichung von  $\dot{f}$ . Somit ist eine Ableitung der Frequenz nicht mehr nötig.

$M_c = \text{theoretische Masse der beiden schwarzen Löcher}$

$G = \text{Gravitationskonstante}$

$c = \text{Lichtkonstante}$

Die Gleichung [20] für die Ableitung der Frequenz lautet:

$$\dot{f} = \frac{96 c^3 f}{5 G M_c} \left( \frac{G}{c^3} \pi f M_c \right)^{\frac{8}{3}}$$

Daraus folgt:

$$Q = \frac{96 c^3}{5 G M_c} \left( \frac{G M_c}{c^3} \pi \right)^{\frac{8}{3}}$$

$$Q = \frac{96}{5} \left( \frac{c^3}{G M_c} \right)^{\frac{5}{3}} \pi^{\frac{8}{3}}$$

und:

$$\dot{f} = Q \cdot f(f)^{\frac{8}{3}}$$

$$\dot{f} = Q \cdot f^{\frac{11}{3}}$$

Doch  $\dot{f}$  ist gleich  $\frac{df}{dt}$ , daraus folgt:

$$dt = \frac{1}{Q} f^{-\frac{11}{3}} df$$

Nun will man das Integral anwenden. Für das darf jedoch der Faktor kein Bruch sein. Deswegen wird eine Variable  $b$  eingesetzt um die Umkehrung von  $Q$  zu erhalten:

$$b = \frac{1}{Q}$$

Nun das Integral anwenden:

$$\Delta t = b \int_{f_1}^{f_2} f^{-\frac{11}{3}} df = \left[ b \frac{f^{-\frac{8}{3}}}{-\frac{8}{3}} \right]_{f_1}^{f_2}$$

$$k = \frac{3b}{8}$$

$k$  ist dann gleich:

$$k = \frac{5}{256} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{-\frac{5}{3}} \pi^{-\frac{8}{3}}$$

$$\Delta t = k \left( f_1^{-\frac{8}{3}} - f_2^{-\frac{8}{3}} \right)$$

Wenn man die Frequenz  $f_0$  nimmt, hat man die Zeit  $t_0 = 0$ . Daraus folgt:

$$\Delta t = t - t_0 = t$$

$$k' = \frac{1}{k}$$

$$k't = f_0^{-\frac{8}{3}} - f^{-\frac{8}{3}} \Rightarrow f^{-\frac{8}{3}} = f_0^{-\frac{8}{3}} - k't$$

$$f = \frac{1}{P}$$

Wobei  $P$  gleich Periodendauer ist.  $P_{GW}$  ist die Periode der Gravitationswelle.

$$P_{GW} = \left( P_0^{\frac{8}{3}} - k't \right)^{\frac{3}{8}}$$

Doch man will die Periode des Orbits heraus finden. Dies wird folgendermassen gelöst:

$$P_{Orb} = 2P_{GW}$$

$$P_{Orb} = \left[ (2P_0)^{\frac{8}{3}} - 2^{\frac{8}{3}} k't \right]^{\frac{3}{8}}$$

$$B = 2^{\frac{8}{3}} k'$$

$$B = \frac{8 \cdot 96}{3 \cdot 5 c^5} (2\pi)^{\frac{8}{3}} (GM_c)^{\frac{5}{3}}$$

$$a = \frac{96}{5c^5} (2\pi)^{\frac{8}{3}} (GM_c)^{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow P_{orb} = \left( P_{orb,0}^{\frac{8}{3}} - \frac{8}{3} at \right)^{\frac{3}{8}} \quad (I)$$

Wenn man vor Millionen von Jahren die Gravitationswellen der schwarzen Löcher, bevor sie miteinander verschmolzen waren, anschaut, ist eine stetige Cosinus Kurve sichtbar. Diese wird mit folgender Formel beschrieben:

$$h(t) = A(t) \cos(\varphi(t))$$

$\varphi$  ist die Phase der Welle ( $0, \pi/2, \pi, \dots$ ). Wenn die zwei Objekte weit voneinander entfernt sind, ist  $A(t) = 0$  doch wenige Sekunden vor der Verschmelzung ist sie nicht 0.  $A(t)$  ist die Zeitvariierbare-Amplitude. Sie wird gleichgesetzt mit  $h_0$  (Strain) und sie ist definiert durch:

$$A(t) = h_0$$

$$A(t) = \frac{(GM_c)^{\frac{5}{3}}}{c^4 r} \left( \frac{\pi}{P_{GW}(t)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (II)$$

Um mit diesen Formeln die Entfernung zur Erde, die Distanz der beider kreisenden Körper, die Geschwindigkeit und die chirp Mass herauszufinden, muss man die Formeln entsprechend umformen. Es wird empfohlen eine Tabelle mit den benötigten Werten (aus Abb. 11) zu erstellen ( $P_0, P(t), t = t_0 - t_2, A_0, A(t)$ ):

**Tab. 2 Periodendauer an verschiedenen Zeitpunkten, [19]**

		Beschreibung	Periodendauer P [s]	Frequenz f [Hz]	Amplitude A []
	0,3 Sekunden bevor die schwarzen Löcher miteinander verschmelzen	Lange „Inspiral Phase“	0,5	2	$0,5 \cdot 10^{-21}$
$t_0$	0,0621 Sekunden vor Verschmelzung	Kurze „Inspiral Phase“	0,020569	48,61	$0,575 \cdot 10^{-21}$
$t_2$	0,026 Sekunden vor Verschmelzung	Kurz vor „Merger“	0,013	76	$0,95 \cdot 10^{-21}$

Alles muss in SI-Einheiten umgerechnet werden. Die Geschwindigkeit und der Abstand, der beiden schwarzen Löcher, bestimmt man mit dem 3. keplerischem Gesetz:

$$G(M_1 + M_2) = \left( \frac{2\pi}{P_{orb}} \right)^2 R^3$$

Daraus folgt wenn  $v = \frac{2\pi}{P_{orb}}$  :

$$v(t) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{P_{GW}(t)} G(M_1 + M_2)} \quad (III)$$

und der Abstand der beiden rotierenden schwarzen Löcher kann berechnet werden mit, wenn  $P_{GW} = 2P_{orb}$ :

$$R(t) = \sqrt[3]{\left(\frac{P_{gw}(t)}{\pi}\right)^2 G(M_1 + M_2)} \quad (IV)$$

Wenn man die chirp Mass berechnen will, so muss man wie folgt vorgehen:

Man geht von Gleichung (I) aus:

$$P_{orb}(t) = \left(P_{orb,0}^{\frac{8}{3}} - \frac{8}{3}at\right)^{\frac{3}{8}}$$

Wenn man auf  $a$  auflöst und davon ausgeht, dass  $P_{orb} = 2P_{GW}$  dann:

$$a = \frac{3}{8} \cdot 2^{\frac{8}{3}} \cdot \frac{P_{GW,0}^{\frac{8}{3}} - P_{GW}(t)^{\frac{8}{3}}}{t}$$

Wobei  $a = 2^{\frac{3}{8}}\sigma$ :

$$\sigma = \frac{3 P_0^{\frac{8}{3}} - P(t)^{\frac{8}{3}}}{8 t}$$

$\sigma$  ist aber auch:

$$\sigma = \frac{96}{5c^5} \pi^{\frac{8}{3}} (GM_c)^{\frac{5}{3}}$$

Daraus folgt:

$$M_c = \frac{1}{G} \left( \frac{5c^5}{96} \pi^{-\frac{8}{3}} \sigma \right)^{\frac{3}{5}} \quad (V)$$

Wenn man die Entfernung zur Erde (Luminosity distance) berechnen will, so muss man zuerst die chirp Mass herausfinden. Dies wird mit der Gleichung (V) gemacht. Um dann endgültig die Luminosity distance zu berechnen, muss man von der Gleichung (II) ausgehen:

$$A(t) = \frac{(GM_c)^{\frac{5}{3}}}{c^4 r} \left( \frac{\pi}{P_{GW}(t)} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Daraus folgt:

$$r = \frac{(GM_c)^{\frac{5}{3}}}{c^4 A(t)} \left( \frac{\pi}{P_{GW}(t)} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Wenn  $r =$  Entfernung  $D$ :

$$D(t) = \frac{(GM_c)^{\frac{5}{3}}}{c^4 A(t)} \left( \frac{\pi}{P_{GW}(t)} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (VI)$$

Da man  $P(t), P_0$  und  $A(t), A_0$  hat, muss es zwei Formeln für die Luminosity distance  $D$  geben.

Darum lautet die zweite:

$$D_0 = \frac{(GM_c)^{\frac{5}{3}}}{c^4 A_0} \left( \frac{\pi}{P_{GW,0}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (VII)$$

Da es zwei Gleichungen sind, wird der Mittelwert verwendet:

$$D = \frac{(D_0 + D(t))}{2} \quad ; I[t_0, t]$$

Wenn man in die Gleichungen (V), (VI) und (VII) Werte von der *Tabelle 2* einsetzt bekommt man folgende Lösungen. Die chirp Mass muss durch einen Faktor von  $s = 1,98855 \cdot 10^{30} kg$  (Masse der Sonne) geteilt werden, damit sie aus ein vielfaches der Sonnenmasse angegeben ist. Die Luminosity distance muss mit einem Faktor  $u = 3.24 \cdot 10^{-23}$  multipliziert werden, damit die Entfernung in MegaParSek angegeben ist. [19]

$$M_c = 7,20258 \cdot 10^{31} kg$$

$$M_c = 36,22 M_{\odot} \quad (\text{am Ereignisort})$$

Die Luminosity distance (Entfernung zur Erde) beträgt:

$$D(t) = 6,80961 \cdot 10^{24} m$$

$$D_0 = 8,3375 \cdot 10^{24} m$$

Da der Mittelwert der beiden Luminosity distances verwendet werden muss, resultiert daraus:

$$D = 7,57355 \cdot 10^{24} m$$

$$D = 245,44 Mpc$$

Wenn man die Lösungen dieses mal mit dem offiziellen LIGO Paper [21] vergleicht, so sieht man, dass die Resultate sehr ähnlich sind:

chirp mass of  $\mathcal{M} \approx 30 M_{\odot}$  (am Detektorort)

Luminosity distance

$410^{+160}_{-180} Mpc$

Abb. 32 von LIGO berechnete chirp Mass und Luminosity distance, [21]

Um Massen vom Detektorort (detector frame) zum Ereignisort (source frame) zu Transformieren muss man den Detektorort Wert mit  $(1 + z)$  multiplizieren, wobei  $z = 0,09^{+0,03}_{-0,04}$ . [12], [21] Wenn diese chirp mass von  $30 M_{\odot}$  [21] am Detektorort transformiert wird, ist die chirp mass am Ereignisort zirka  $33 M_{\odot}$  gross. Die Abweichung beträgt dann zirka 3 Solarmassen.

Die Abweichung der Luminosity distance darf laut LIGO [12] im Bereich von [410+160,410-180] Mpc = [570,230] Mpc liegen. Daraus folgt, dass diese beiden Resultate als brauchbar angesehen werden können.

Um nun die totale physikalische Masse der beiden schwarzen Löcher herauszufinden muss man abschätzen, wie gross das  $M_1$  und  $M_2$  sind. Doch dies ist nicht möglich. Darum wird hier davon ausgegangen, dass der Schwarzschildradius eine Distanz von  $R_s \gtrsim 210\text{km}$  [21] hat. Mit der Formel:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (VIII)$$

Wobei:

$$M = M_1 + M_2$$

lässt sich dann eine Untere Grenze der totalen Masse, der Distanz und die Geschwindigkeit der beiden rotierenden Körper herausfinden. Abgeleitet von (VIII) entstehen die Gleichungen:

$$M = \frac{R_s c^2}{2G}$$

Wobei:

$$M_{min} = \frac{R_{s,min} c^2}{2G}$$

Wenn die Gleichung (IV) verwendet wird resultiert daraus, wenn  $R_s = R$ :

$$R = \sqrt[3]{\left(\frac{P_{gw}(t)}{\pi}\right)^2 G(M)}$$

Um die Untere Grenze der Geschwindigkeit zu finden, wird die Formel  $v = \frac{2\pi R}{P_{Orb}}$  mit  $P_{GW} = 2P_{Orb}$  angewendet. Daraus folgt:

$$v = \frac{\pi R}{P_{GW}} \quad (IX)$$

oder mit der Gleichung (III):

$$v(t) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{P_{GW}(t)} G(M_1 + M_2)}$$

Zuerst muss durch einfaches einsetzen des Schwarzschildradius  $R_s \gtrsim 210\text{km}$  die Unteregrenze der totalen Masse berechnet werden:

$$M_{min} = 70M_{\odot}$$

Daraus folgt:

$$M \gtrsim 70M_{\odot}$$

Es wird eine Tabelle erstellt, damit man den Verlauf der Distanz und die Geschwindigkeit der rotierenden Körper in der Zeit sehen kann. Die Masse muss noch in die source Frame umge-

rechnet werden. Dies wird mit dem Faktor  $redshift^{-1} = \frac{1}{(1+z)}$  transformiert. Die totale Masse beträgt dann in der source frame zirka  $63 M_{\odot}$ .

Zeit1 [t1]	Periodendauer [P(t)]	Distanz [R(t)]	Geschw. [v(t)]	Distanz (n*R)	Geschw. in c
0.35	0.022644	755270.38	104785015.5	3.59652564	0.3495164
0.37	0.020569	708395.53	108196323.7	3.373312033	0.36089501
0.39	0.015625	589766.87	118579665.8	2.808413686	0.39552924
0.40	0.013122	524969.07	125685030	2.499852698	0.41922959
0.42	0.012447	506808.03	127917118.4	2.413371555	0.42667484
0.42	0.010577	454682.98	135050458.4	2.165157031	0.45046851
0.43	0.008601	396125.67	144688466.9	1.886312728	0.48261663
0.43	0.006418	325886.85	159520680.3	1.551842132	0.53209033
0.44	0.003235	206403.26	200443573.1	0.982872657	0.66859097

Abb. 33 Berechnung der Geschwindigkeit und des Abstandes der rotierenden Objekte

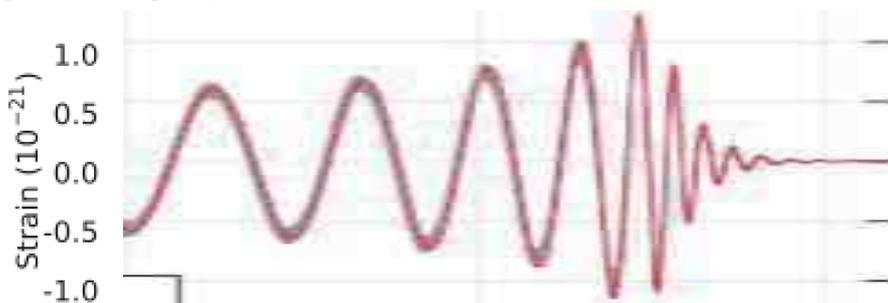
Der Anfang der Zeit (gerundete Werte) wurde bei 0.35 Sekunden gewählt, da vorher noch keine konstanten Perioden im Strain-Time Diagramm vorliegen. Die Distanz der beiden schwarzen Löcher und die Geschwindigkeit wurden mit den Formeln (IV) und (IX) berechnet. Die Spalte 5 ist die Distanz in einem Vielfachen des Schwarzschildradius und wurde deshalb folgendermassen berechnet:

$$R_{\text{Vielfach von } R_s} = \frac{R \text{ (von Spalte 3)}}{R_s}$$

Die Spalte 6 ist ein Vielfaches von der Lichtgeschwindigkeit und wurde so berechnet:

$$v_{\text{Vielfach von } c} = \frac{v \text{ (von Spalte 4)}}{c}$$

Daraus folgt das Diagramm Separation (x-Achse = Zeit; y-Achse = Vielfaches des Schwarzschildradius) und das Diagramm Velocity (x-Achse = Zeit; y-Achse = Vielfaches von der Lichtgeschwindigkeit):



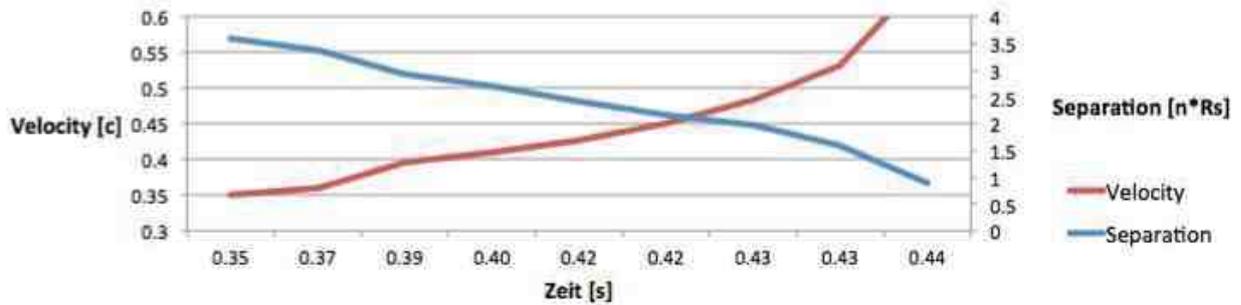


Abb. 34 Diagramm des Abstandes und der Geschwindigkeit in der Zeit

Diese können mit den offiziellen Diagrammen von LIGO [21] verglichen werden, welche nur eine kleine Abweichung aufweisen.

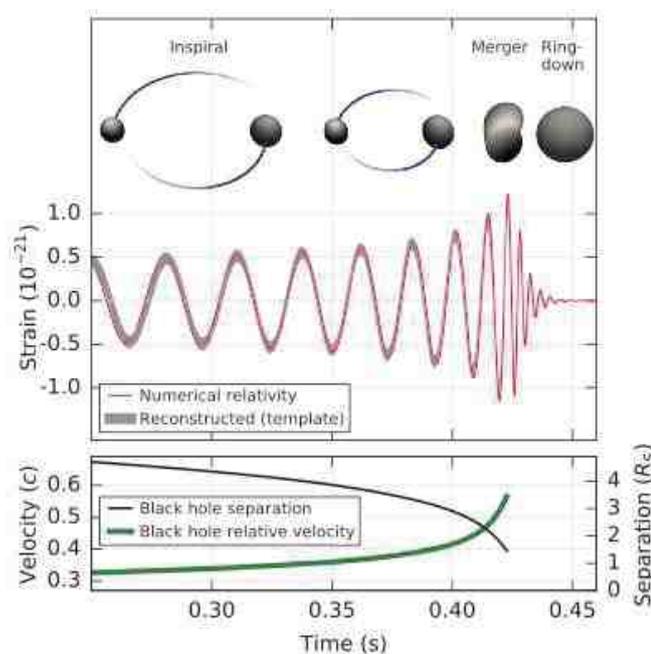


Abb. 35 offizielles LIGO Diagramm der Geschwindigkeit und des Abstandes, [21] (Anhang)

## 2.4 Ergebnisse

In der Arbeit wurde erfolgreich gezeigt, wie man die chirp mass, die totale Masse, die Luminosity distance (Entfernung zur Erde) und die Geschwindigkeit wie der Abstand der rotierenden schwarzen Löcher berechnen kann. Viele Graphiken der LIGO Seite und des Papers [12], [21] konnten nachgestellt und somit als richtig anerkannt werden. Die Feldgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie wurde sehr grob erklärt, wie auch die Bewegung und Polarisation einer Gravitationswelle. Es wurde auch gezeigt, warum die Zeit langsamer und ein Objekt kürzer wird, umso näher es an die Lichtgeschwindigkeit  $c$  beschleunigt wird und dass die Gravitation wie eine Beschleunigung wirkt. Die Luminosity distance und die chirp mass wurde mit Excel,

wie auch mit den Perioden und Umformungen herausgefunden. Doch um die separaten Massen  $M_1$  und  $M_2$  herauszufinden, wurde in dieser Arbeit keine Lösung gefunden. Darum auch für den  $3_{-0,5}^{+0,5} M_{\odot} c^2$  Massenverlust der zwei schwarzen Löcher [21], die als Gravitationswellen abgegeben wurden. Für welchen man die Masse  $M_1$  und  $M_2$  und genauere Werte gebraucht hätte.

Diese Arbeit zeigt schlussendlich auf, dass mit ein bisschen Mathematik und logischem Denken, schon viel in einem relativ einfachen Niveau, erreicht werden kann.



### 3 Bibliographie

#### 3.1 Schriftliche Quellen

- [1] THORNE, KIP (1995). Kip Thorne Quotes.  
<http://www.brainyquote.com/quotes/quotes/k/kipthorne682520.html> [3.10.2016]
- [2] WHEELER, JOHN ARCHIBALD (1990). John Archibald Quotes.  
[https://www.goodreads.com/author/quotes/30075.John\\_Archibald\\_Wheeler](https://www.goodreads.com/author/quotes/30075.John_Archibald_Wheeler)  
[14.10.2016]
- [3] GROTELÜSCHEN, FRANK (2015). Gesucht: Einstein letztes Hirngespinnst.  
<http://www.zeit.de/2015/36/gravitationswellen-albert-einstein-hirngespinnst> [1.5.2016]
- [4] GREHN, JOACHIM UND KRAUSE, JOACHIM. 2014. Metzler Physik (Kapitel 9).  
Schroedel. Braunschweig
- [5] UNBEKANNTER AUTOR (). Die Lorentz-Transformation und Ihre Konsequenzen.  
<http://www.ha.shuttle.de/ha/hildegardis/mint/physik/materialien/arbeitsbl/lorentz.pdf>  
[30.5.2016]
- [6] DUHESME, FRANCOIS (2013). Die Äquivalenzprinzipien von Einstein.  
<http://www.weltderphysik.de/detektor/physik-pur/die-aequivalenzprinzipien-des-albert-einstein/> [7.10.2016]
- [7] UNBEKANNTER AUTOR (1998). Machsches Prinzip.  
<http://www.spektrum.de/lexikon/physik/machsches-prinzip/9262> [2.10.2016]
- [8] PUNTIGAM, R. A. (1998). Allgemeine Relativitätstheorie.  
<http://www.spektrum.de/lexikon/physik/allgemeine-relativitaetstheorie/383> [13.7.2016]
- [9] TOUNI, ACHMED UND PROF. BÖHM, A. (2002). Die Suche nach Gravitationswellen.  
<https://web.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/lectures/sem02/touni2.pdf> [5.7.2016]
- [10] FREISTETTER, FLORIAN (2016). Der direkte Nachweis von Gravitationswellen.  
<https://web.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/lectures/sem02/touni2.pdf> [23.6.2016]
- [11] SCHOLZ, CHRISTIAN (2008). Theorie der Gravitationswellen.  
<http://pulsar.sternwarte.uni-erlangen.de/wilms/teach/astrosem07/Gravitationswellen.pdf>  
[12.10.2016]
- [12] ALAN WEINSTEIN, ROY WILLIAMS, JONAH KANNER, MICHLELE VALISNERI, BRANSON STEPHENS (2016). LIGO Open Science Center.  
<https://losc.ligo.org/events/GW150914/> [5.4.2016]
- [13] ALAN WEINSTEIN, ROY WILLIAMS, JONAH KANNER, MICHLELE VALISNERI, BRANSON STEPHENS (2016). Time-Strain.  
<https://losc.ligo.org/s/events/GW150914/P150914/fig1-observed-H.txt> [14.10.2016]
- [14] BALZER, PAUL (2013). FFT mit Excel. <http://www.cbccity.de/fft-mit-excel-dft-antialiasing-tutorial-amplitudenspektrum> [3.10.2016]

- [15] MEHRERE AUTOREN (2016). Fourier-Transformation.  
<https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analysis> [14.10.2016]
- [16] MEHRERE AUTOREN (2016). Diskrete Fourier-Transformation.  
[https://de.wikipedia.org/wiki/Diskrete\\_Fourier-Transformation](https://de.wikipedia.org/wiki/Diskrete_Fourier-Transformation) [26.9.2016]
- [17] BEARDMORE, ROY (2009). Discrete Fourier Transforms.  
[http://www.roymech.co.uk/Useful\\_Tables/Maths/fourier/Maths\\_Fourier\\_DFT\\_FFT.html](http://www.roymech.co.uk/Useful_Tables/Maths/fourier/Maths_Fourier_DFT_FFT.html) [3.10.2016]
- [18] SCHÖPF, MARKUS (2014). Interpolation von n Punkten durch ein Polynom von (n-1)ten Grade. <https://www.geogebra.org/material/show/id/95990> [14.10.2016]
- [19] PENNSYLVANIA STATE UNIVERISTY (2007). Extraction of Astrophysical Information from Simulated Signals.  
[http://cgwp.gravity.psu.edu/outreach/activities/handson\\_activity/downloads/handson\\_teachers\\_guide.pdf](http://cgwp.gravity.psu.edu/outreach/activities/handson_activity/downloads/handson_teachers_guide.pdf) [17.10.2016]
- [20] UNBEKANNTER AUTOR (). Gravitational Waves.  
<http://www.physics.usu.edu/Wheeler/GenRel2013/Notes/GravitationalWaves.pdf> [17.10.2016]
- [21] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. <https://physics.aps.org/featured-article-pdf/10.1103/PhysRevLett.116.061102> [17.10.2016]

**Bemerkung:** 'https' Links müssen mit Copy & Paste geöffnet werden.

### 3.2 Mündliche Quellen und Notizen

- [22] Dr. rer. Nat. Chiantese, Stefano. Betreuer dieser Arbeit
- [23] Wolfgang, Michler. ANDRITZ HYDRO AG, R & D für Transienten Berechnung von Druckleitungen bei Wasserkraftwerken
- [24] Schmidiger, Eduard. Vater

### 3.3 Abbildungsverzeichnis

- Abb. 1 zwei rotierende, massenreiche Objekte, die Masse in Form von Gravitationswellen verlieren, 2
- Abb. 2 Polarisation einer Gravitationswelle, [9]
- Abb. 3 Einfluss einer Gravitationswelle auf den Raum, [9] 16
- Abb. 4 Verschiebung einer Cosinuskurve 17
- Abb. 5 Definition von h mit einer Matrix, [11] 18

Abb. 6 stark vereinfachter Versuchsaufbau, <a href="https://assets-jpcust.jwpsrv.com/thumbs/8Lg6YJCI-1280.jpg">assets-jpcust.jwpsrv.com/thumbs/8Lg6YJCI-1280.jpg</a> [20.8.2016]	19
Abb. 7 Ursprungslage, [9]	
Abb. 8 y-Richtung dehnend, [9]	
Abb. 9 x-Richtung dehnend, [9]	20
Abb. 10 Hintergrundgeräusche, die herausgefiltert werden, [21]	20
Abb. 11 Strain-Time-Diagramm (Excel)	21
Abb. 12 Die 5 Spalten	22
Abb. 13 komplexes Amplitudenspektrum	23
Abb. 14 absolutes Amplitudenspektrum	23
Abb. 15 Normierung des absoluten Amplitudenspektrums	23
Abb. 16 Die zugehörige Frequenz	24
Abb. 17 Amplitudenspektrum, Amplitude in der Abhängigkeit von der Frequenz	25
Abb. 18 Verfahren der Datenanalyse mit Zeitabschnitten,	26
Abb. 19 Die 5 Spalten ausgefüllt	26
Abb. 20 Zahlenmatrix, Zeitbereiche, Frequenz und Amplitude	27
Abb. 21 Markieren der Zahlenmatrix	27
Abb. 22 3D Diagramm mit Frequenzen bis zu 4096 Hz	27
Abb. 23 3D Diagramm mit Frequenzen bis zu 512 Hz und weitere Anpassungen	28
Abb. 24 Offizielles 3D Diagramm von LIGO, [12], [21] (siehe Anhang)	28
Abb. 25 Varianten der Fourier-Transformation, Wiki. <a href="https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse">de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse</a>	29
Abb. 26 Tabelle in GeoGebra	30
Abb. 27 Punkteliste in GeoGebra mit 4 Punkten	30
Abb. 28 Polynomfunktion der 4 Punkte	30
Abb. 29 Ableitung der exponentiellen Funktion	31
Abb. 30 Entsprechende Zeit in Abgeleitete Funktion eingesetzt	31
Abb. 31 Berechnung der Luminosity distance und der chirp mass mit Excel	31
Abb. 32 von LIGO berechnete chirp Mass und Luminosity distance, [21]	36
Abb. 33 Berechnung der Geschwindigkeit und des Abstandes der rotierenden Objekte	38
Abb. 34 Diagramm des Abstandes und der Geschwindigkeit in der Zeit	39
Abb. 35 offizielles LIGO Diagramm der Geschwindigkeit und des Abstandes, [21] (Anhang)	39



## 4 Anhang

PRL **116**, 061102 (2016)Selected for a Viewpoint in *Physics*  
PHYSICAL REVIEW LETTERSweek ending  
12 FEBRUARY 2016**Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger**B. P. Abbott *et al.*\*

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC the two detectors of the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory simultaneously observed a transient gravitational-wave signal. The signal sweeps upwards in frequency from 35 to 250 Hz with a peak gravitational-wave strain of  $1.0 \times 10^{-21}$ . It matches the waveform predicted by general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. The signal was observed with a matched-filter signal-to-noise ratio of 24 and a false alarm rate estimated to be less than 1 event per 203 000 years, equivalent to a significance greater than  $5.1\sigma$ . The source lies at a luminosity distance of  $410^{+160}_{-180}$  Mpc corresponding to a redshift  $z = 0.09^{+0.03}_{-0.04}$ . In the source frame, the initial black hole masses are  $36^{+5}_{-4} M_{\odot}$  and  $29^{+4}_{-4} M_{\odot}$ , and the final black hole mass is  $62^{+4}_{-4} M_{\odot}$ , with  $3.0^{+0.5}_{-0.5} M_{\odot} c^2$  radiated in gravitational waves. All uncertainties define 90% credible intervals. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102

**I. INTRODUCTION**

In 1916, the year after the final formulation of the field equations of general relativity, Albert Einstein predicted the existence of gravitational waves. He found that the linearized weak-field equations had wave solutions: transverse waves of spatial strain that travel at the speed of light, generated by time variations of the mass quadrupole moment of the source [1,2]. Einstein understood that gravitational-wave amplitudes would be remarkably small; moreover, until the Chapel Hill conference in 1957 there was significant debate about the physical reality of gravitational waves [3].

Also in 1916, Schwarzschild published a solution for the field equations [4] that was later understood to describe a black hole [5,6], and in 1963 Kerr generalized the solution to rotating black holes [7]. Starting in the 1970s theoretical work led to the understanding of black hole quasinormal modes [8–10], and in the 1990s higher-order post-Newtonian calculations [11] preceded extensive analytical studies of relativistic two-body dynamics [12,13]. These advances, together with numerical relativity breakthroughs in the past decade [14–16], have enabled modeling of binary black hole mergers and accurate predictions of their gravitational waveforms. While numerous black hole candidates have now been identified through electromagnetic observations [17–19], black hole mergers have not previously been observed.

\*Full author list given at the end of the article.

Published by the American Physical Society under the terms of the Creative Commons Attribution 3.0 License. Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI.

The discovery of the binary pulsar system PSR B1913+16 by Hulse and Taylor [20] and subsequent observations of its energy loss by Taylor and Weisberg [21] demonstrated the existence of gravitational waves. This discovery, along with emerging astrophysical understanding [22], led to the recognition that direct observations of the amplitude and phase of gravitational waves would enable studies of additional relativistic systems and provide new tests of general relativity, especially in the dynamic strong-field regime.

Experiments to detect gravitational waves began with Weber and his resonant mass detectors in the 1960s [23], followed by an international network of cryogenic resonant detectors [24]. Interferometric detectors were first suggested in the early 1960s [25] and the 1970s [26]. A study of the noise and performance of such detectors [27], and further concepts to improve them [28], led to proposals for long-baseline broadband laser interferometers with the potential for significantly increased sensitivity [29–32]. By the early 2000s, a set of initial detectors was completed, including TAMA 300 in Japan, GEO 600 in Germany, the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) in the United States, and Virgo in Italy. Combinations of these detectors made joint observations from 2002 through 2011, setting upper limits on a variety of gravitational-wave sources while evolving into a global network. In 2015, Advanced LIGO became the first of a significantly more sensitive network of advanced detectors to begin observations [33–36].

A century after the fundamental predictions of Einstein and Schwarzschild, we report the first direct detection of gravitational waves and the first direct observation of a binary black hole system merging to form a single black hole. Our observations provide unique access to the

properties of space-time in the strong-field, high-velocity regime and confirm predictions of general relativity for the nonlinear dynamics of highly disturbed black holes.

## II. OBSERVATION

On September 14, 2015 at 09:50:45 UTC, the LIGO Hanford, WA, and Livingston, LA, observatories detected

the coincident signal GW150914 shown in Fig. 1. The initial detection was made by low-latency searches for generic gravitational-wave transients [41] and was reported within three minutes of data acquisition [43]. Subsequently, matched-filter analyses that use relativistic models of compact binary waveforms [44] recovered GW150914 as the most significant event from each detector for the observations reported here. Occurring within the 10-ms intersite

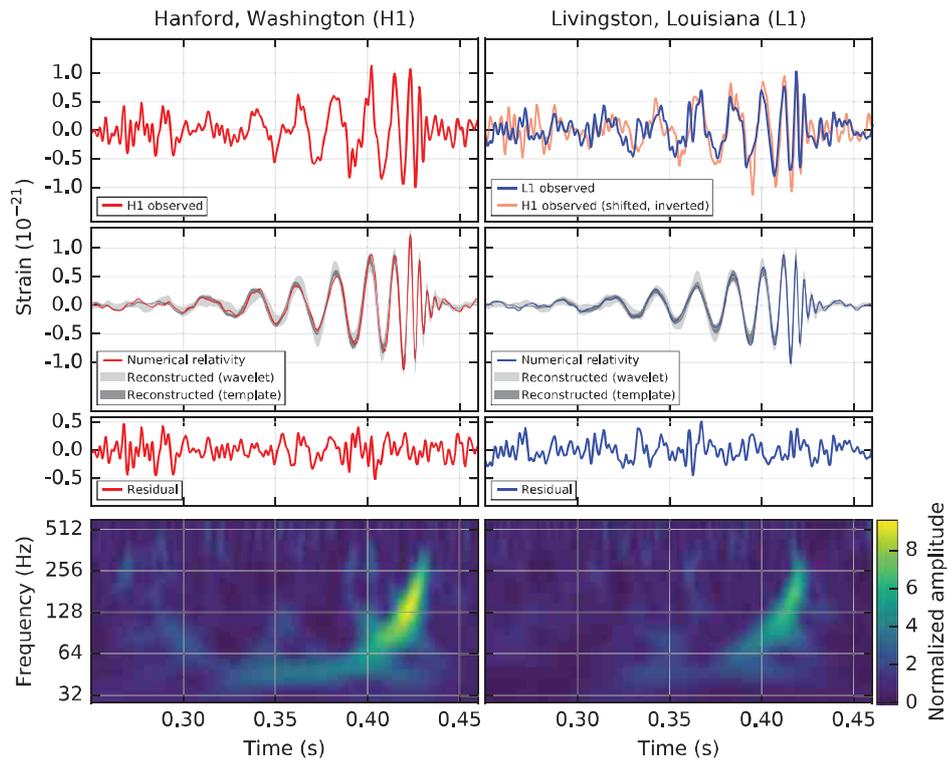


FIG. 1. The gravitational-wave event GW150914 observed by the LIGO Hanford (H1, left column panels) and Livingston (L1, right column panels) detectors. Times are shown relative to September 14, 2015 at 09:50:45 UTC. For visualization, all time series are filtered with a 35–350 Hz bandpass filter to suppress large fluctuations outside the detectors’ most sensitive frequency band, and band-reject filters to remove the strong instrumental spectral lines seen in the Fig. 3 spectra. *Top row, left:* H1 strain. *Top row, right:* L1 strain. GW150914 arrived first at L1 and  $6.9^{+0.5}_{-0.4}$  ms later at H1; for a visual comparison, the H1 data are also shown, shifted in time by this amount and inverted (to account for the detectors’ relative orientations). *Second row:* Gravitational-wave strain projected onto each detector in the 35–350 Hz band. Solid lines show a numerical relativity waveform for a system with parameters consistent with those recovered from GW150914 [37,38] confirmed to 99.9% by an independent calculation based on [15]. Shaded areas show 90% credible regions for two independent waveform reconstructions. One (dark gray) models the signal using binary black hole template waveforms [39]. The other (light gray) does not use an astrophysical model, but instead calculates the strain signal as a linear combination of sine-Gaussian wavelets [40,41]. These reconstructions have a 94% overlap, as shown in [39]. *Third row:* Residuals after subtracting the filtered numerical relativity waveform from the filtered detector time series. *Bottom row:* A time-frequency representation [42] of the strain data, showing the signal frequency increasing over time.

propagation time, the events have a combined signal-to-noise ratio (SNR) of 24 [45].

Only the LIGO detectors were observing at the time of GW150914. The Virgo detector was being upgraded, and GEO 600, though not sufficiently sensitive to detect this event, was operating but not in observational mode. With only two detectors the source position is primarily determined by the relative arrival time and localized to an area of approximately  $600 \text{ deg}^2$  (90% credible region) [39,46].

The basic features of GW150914 point to it being produced by the coalescence of two black holes—i.e., their orbital inspiral and merger, and subsequent final black hole ringdown. Over 0.2 s, the signal increases in frequency and amplitude in about 8 cycles from 35 to 150 Hz, where the amplitude reaches a maximum. The most plausible explanation for this evolution is the inspiral of two orbiting masses,  $m_1$  and  $m_2$ , due to gravitational-wave emission. At the lower frequencies, such evolution is characterized by the chirp mass [11]

$$\mathcal{M} + \frac{-m_1 m_2 (3/5)}{-m_1} + \frac{c^3}{G} \left[ \frac{5}{96} \frac{-8/3 f - 11/3 \dot{f}}{f} \right]^{3/5},$$

where  $f$  and  $\dot{f}$  are the observed frequency and its time derivative and  $G$  and  $c$  are the gravitational constant and speed of light. Estimating  $f$  and  $\dot{f}$  from the data in Fig. 1, we obtain a chirp mass of  $\mathcal{M} \odot 30M_{\odot}$ , implying that the total mass  $M + m_1 + m_2$  is  $\gtrsim 70M_{\odot}$  in the detector frame. This bounds the sum of the Schwarzschild radii of the binary components to  $2GM/c^2 \gtrsim 210 \text{ km}$ . To reach an orbital frequency of 75 Hz (half the gravitational-wave frequency) the objects must have been very close and very compact; equal Newtonian point masses orbiting at this frequency would be only  $\odot 350 \text{ km}$  apart. A pair of neutron stars, while compact, would not have the required mass, while a black hole neutron star binary with the deduced chirp mass would have a very large total mass, and would thus merge at much lower frequency. This leaves black holes as the only known objects compact enough to reach an orbital frequency of 75 Hz without contact. Furthermore, the decay of the waveform after it peaks is consistent with the damped oscillations of a black hole relaxing to a final stationary Kerr configuration. Below, we present a general-relativistic analysis of GW150914; Fig. 2 shows the calculated waveform using the resulting source parameters.

### III. DETECTORS

Gravitational-wave astronomy exploits multiple, widely separated detectors to distinguish gravitational waves from local instrumental and environmental noise, to provide source sky localization, and to measure wave polarizations. The LIGO sites each operate a single Advanced LIGO

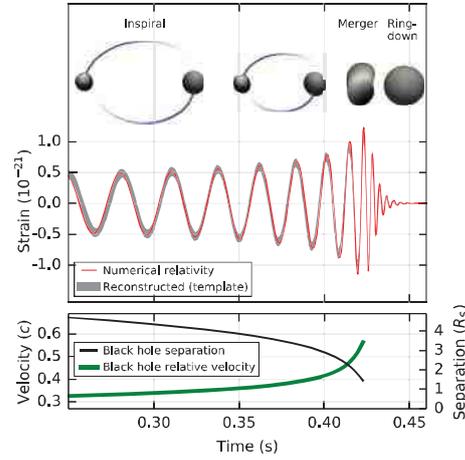


FIG. 2. *Top*: Estimated gravitational-wave strain amplitude from GW150914 projected onto H1. This shows the full bandwidth of the waveforms, without the filtering used for Fig. 1. The inset images show numerical relativity models of the black hole horizons as the black holes coalesce. *Bottom*: The Keplerian effective black hole separation in units of Schwarzschild radii ( $R_S + 2GM/c^2$ ) and the effective relative velocity given by the post-Newtonian parameter  $v/c + \pm GM f/c^3 (1/3)$ , where  $f$  is the gravitational-wave frequency calculated with numerical relativity and  $M$  is the total mass (value from Table I).

detector [33], a modified Michelson interferometer (see Fig. 3) that measures gravitational-wave strain as a difference in length of its orthogonal arms. Each arm is formed by two mirrors, acting as test masses, separated by  $L_x + L_y + L + 4 \text{ km}$ . A passing gravitational wave effectively alters the arm lengths such that the measured difference is  $\Delta L \neq (L_x - L_y) + h \neq (L)$ , where  $h$  is the gravitational-wave strain amplitude projected onto the detector. This differential length variation alters the phase difference between the two light fields returning to the beam splitter, transmitting an optical signal proportional to the gravitational-wave strain to the output photodetector.

To achieve sufficient sensitivity to measure gravitational waves, the detectors include several enhancements to the basic Michelson interferometer. First, each arm contains a resonant optical cavity, formed by its two test mass mirrors, that multiplies the effect of a gravitational wave on the light phase by a factor of 300 [48]. Second, a partially transmissive power-recycling mirror at the input provides additional resonant buildup of the laser light in the interferometer as a whole [49,50]: 20 W of laser input is increased to 700 W incident on the beam splitter, which is further increased to 100 kW circulating in each arm cavity. Third, a partially transmissive signal-recycling mirror at the output optimizes

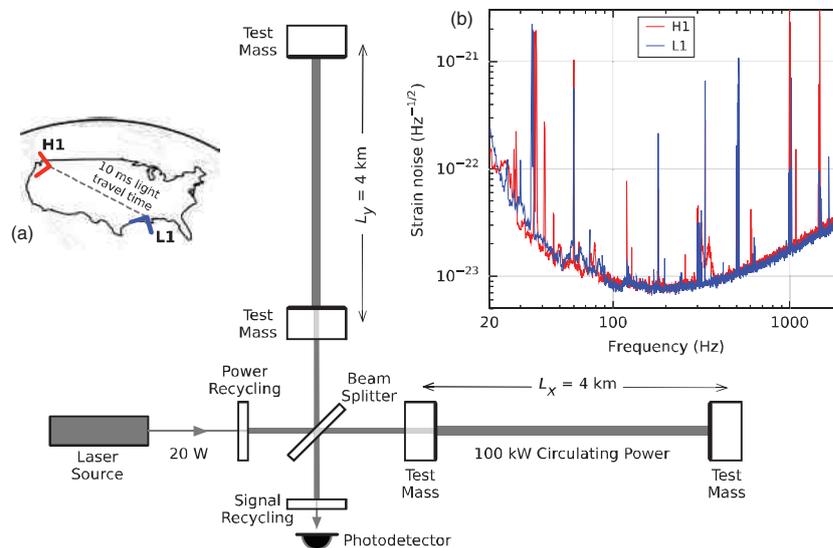


FIG. 3. Simplified diagram of an Advanced LIGO detector (not to scale). A gravitational wave propagating orthogonally to the detector plane and linearly polarized parallel to the 4-km optical cavities will have the effect of lengthening one 4-km arm and shortening the other during one half-cycle of the wave; these length changes are reversed during the other half-cycle. The output photodetector records these differential cavity length variations. While a detector's directional response is maximal for this case, it is still significant for most other angles of incidence or polarizations (gravitational waves propagate freely through the Earth). *Inset (a)*: Location and orientation of the LIGO detectors at Hanford, WA (H1) and Livingston, LA (L1). *Inset (b)*: The instrument noise for each detector near the time of the signal detection; this is an amplitude spectral density, expressed in terms of equivalent gravitational-wave strain amplitude. The sensitivity is limited by photon shot noise at frequencies above 150 Hz, and by a superposition of other noise sources at lower frequencies [47]. Narrow-band features include calibration lines (33–38, 330, and 1080 Hz), vibrational modes of suspension fibers (500 Hz and harmonics), and 60 Hz electric power grid harmonics.

the gravitational-wave signal extraction by broadening the bandwidth of the arm cavities [51,52]. The interferometer is illuminated with a 1064-nm wavelength Nd:YAG laser, stabilized in amplitude, frequency, and beam geometry [53,54]. The gravitational-wave signal is extracted at the output port using a homodyne readout [55].

These interferometry techniques are designed to maximize the conversion of strain to optical signal, thereby minimizing the impact of photon shot noise (the principal noise at high frequencies). High strain sensitivity also requires that the test masses have low displacement noise, which is achieved by isolating them from seismic noise (low frequencies) and designing them to have low thermal noise (intermediate frequencies). Each test mass is suspended as the final stage of a quadruple-pendulum system [56], supported by an active seismic isolation platform [57]. These systems collectively provide more than 10 orders of magnitude of isolation from ground motion for frequencies above 10 Hz. Thermal noise is minimized by using low-mechanical-loss materials in the test masses and their

suspensions: the test masses are 40-kg fused silica substrates with low-loss dielectric optical coatings [58,59], and are suspended with fused silica fibers from the stage above [60].

To minimize additional noise sources, all components other than the laser source are mounted on vibration isolation stages in ultrahigh vacuum. To reduce optical phase fluctuations caused by Rayleigh scattering, the pressure in the 1.2-m diameter tubes containing the arm-cavity beams is maintained below  $1 \mu\text{Pa}$ .

Servo controls are used to hold the arm cavities on resonance [61] and maintain proper alignment of the optical components [62]. The detector output is calibrated in strain by measuring its response to test mass motion induced by photon pressure from a modulated calibration laser beam [63]. The calibration is established to an uncertainty ( $1\sigma$ ) of less than 10% in amplitude and 10 degrees in phase, and is continuously monitored with calibration laser excitations at selected frequencies. Two alternative methods are used to validate the absolute calibration, one referenced to the main laser wavelength and the other to a radio-frequency oscillator

[64]. Additionally, the detector response to gravitational waves is tested by injecting simulated waveforms with the calibration laser.

To monitor environmental disturbances and their influence on the detectors, each observatory site is equipped with an array of sensors: seismometers, accelerometers, microphones, magnetometers, radio receivers, weather sensors, ac-power line monitors, and a cosmic-ray detector [65]. Another  $\sim 10^5$  channels record the interferometer's operating point and the state of the control systems. Data collection is synchronized to Global Positioning System (GPS) time to better than  $10 \mu\text{s}$  [66]. Timing accuracy is verified with an atomic clock and a secondary GPS receiver at each observatory site.

In their most sensitive band, 100–300 Hz, the current LIGO detectors are 3 to 5 times more sensitive to strain than initial LIGO [67]; at lower frequencies, the improvement is even greater, with more than ten times better sensitivity below 60 Hz. Because the detectors respond proportionally to gravitational-wave amplitude, at low redshift the volume of space to which they are sensitive increases as the cube of strain sensitivity. For binary black holes with masses similar to GW150914, the space-time volume surveyed by the observations reported here surpasses previous observations by an order of magnitude [68].

#### IV. DETECTOR VALIDATION

Both detectors were in steady state operation for several hours around GW150914. All performance measures, in particular their average sensitivity and transient noise behavior, were typical of the full analysis period [69,70].

Exhaustive investigations of instrumental and environmental disturbances were performed, giving no evidence to suggest that GW150914 could be an instrumental artifact [69]. The detectors' susceptibility to environmental disturbances was quantified by measuring their response to specially generated magnetic, radio-frequency, acoustic, and vibration excitations. These tests indicated that any external disturbance large enough to have caused the observed signal would have been clearly recorded by the array of environmental sensors. None of the environmental sensors recorded any disturbances that evolved in time and frequency like GW150914, and all environmental fluctuations during the second that contained GW150914 were too small to account for more than 6% of its strain amplitude. Special care was taken to search for long-range correlated disturbances that might produce nearly simultaneous signals at the two sites. No significant disturbances were found.

The detector strain data exhibit non-Gaussian noise transients that arise from a variety of instrumental mechanisms. Many have distinct signatures, visible in auxiliary data channels that are not sensitive to gravitational waves; such instrumental transients are removed from our analyses [69]. Any instrumental transients that remain in the data are accounted for in the estimated detector backgrounds

described below. There is no evidence for instrumental transients that are temporally correlated between the two detectors.

#### V. SEARCHES

We present the analysis of 16 days of coincident observations between the two LIGO detectors from September 12 to October 20, 2015. This is a subset of the data from Advanced LIGO's first observational period that ended on January 12, 2016.

GW150914 is confidently detected by two different types of searches. One aims to recover signals from the coalescence of compact objects, using optimal matched filtering with waveforms predicted by general relativity. The other search targets a broad range of generic transient signals, with minimal assumptions about waveforms. These searches use independent methods, and their response to detector noise consists of different, uncorrelated, events. However, strong signals from binary black hole mergers are expected to be detected by both searches.

Each search identifies candidate events that are detected at both observatories consistent with the intersite propagation time. Events are assigned a detection-statistic value that ranks their likelihood of being a gravitational-wave signal. The significance of a candidate event is determined by the search background—the rate at which detector noise produces events with a detection-statistic value equal to or higher than the candidate event. Estimating this background is challenging for two reasons: the detector noise is nonstationary and non-Gaussian, so its properties must be empirically determined; and it is not possible to shield the detector from gravitational waves to directly measure a signal-free background. The specific procedure used to estimate the background is slightly different for the two searches, but both use a time-shift technique: the time stamps of one detector's data are artificially shifted by an offset that is large compared to the intersite propagation time, and a new set of events is produced based on this time-shifted data set. For instrumental noise that is uncorrelated between detectors this is an effective way to estimate the background. In this process a gravitational-wave signal in one detector may coincide with time-shifted noise transients in the other detector, thereby contributing to the background estimate. This leads to an overestimate of the noise background and therefore to a more conservative assessment of the significance of candidate events.

The characteristics of non-Gaussian noise vary between different time-frequency regions. This means that the search backgrounds are not uniform across the space of signals being searched. To maximize sensitivity and provide a better estimate of event significance, the searches sort both their background estimates and their event candidates into different classes according to their time-frequency morphology. The significance of a candidate event is measured against the background of its class. To account for having searched

multiple classes, this significance is decreased by a trials factor equal to the number of classes [71].

### A. Generic transient search

Designed to operate without a specific waveform model, this search identifies coincident excess power in time-frequency representations of the detector strain data [43,72], for signal frequencies up to 1 kHz and durations up to a few seconds.

The search reconstructs signal waveforms consistent with a common gravitational-wave signal in both detectors using a multidetector maximum likelihood method. Each event is ranked according to the detection statistic  $\eta_c + \sqrt{2E_c}/\sqrt{E_n/E_c}$ , where  $E_c$  is the dimensionless coherent signal energy obtained by cross-correlating the two reconstructed waveforms, and  $E_n$  is the dimensionless residual noise energy after the reconstructed signal is subtracted from the data. The statistic  $\eta_c$  thus quantifies the SNR of the event and the consistency of the data between the two detectors.

Based on their time-frequency morphology, the events are divided into three mutually exclusive search classes, as described in [41]: events with time-frequency morphology of known populations of noise transients (class C1), events with frequency that increases with time (class C3), and all remaining events (class C2).

Detected with  $\eta_c + 20.0$ , GW150914 is the strongest event of the entire search. Consistent with its coalescence signal signature, it is found in the search class C3 of events with increasing time-frequency evolution. Measured on a background equivalent to over 67 400 years of data and including a trials factor of 3 to account for the search classes, its false alarm rate is lower than 1 in 22 500 years. This corresponds to a probability  $< 2 \times 10^{-6}$  of observing one or more noise events as strong as GW150914 during the analysis time, equivalent to  $4.6\sigma$ . The left panel of Fig. 4 shows the C3 class results and background.

The selection criteria that define the search class C3 reduce the background by introducing a constraint on the signal morphology. In order to illustrate the significance of GW150914 against a background of events with arbitrary shapes, we also show the results of a search that uses the same set of events as the one described above but without this constraint. Specifically, we use only two search classes: the C1 class and the union of C2 and C3 classes (C2 ( C3)). In this two-class search the GW150914 event is found in the C2 ( C3 class. The left panel of Fig. 4 shows the C2 ( C3 class results and background. In the background of this class there are four events with  $\eta_c \geq 32.1$ , yielding a false alarm rate for GW150914 of 1 in 8 400 years. This corresponds to a false alarm probability of  $5 \times 10^{-6}$  equivalent to  $4.4\sigma$ .

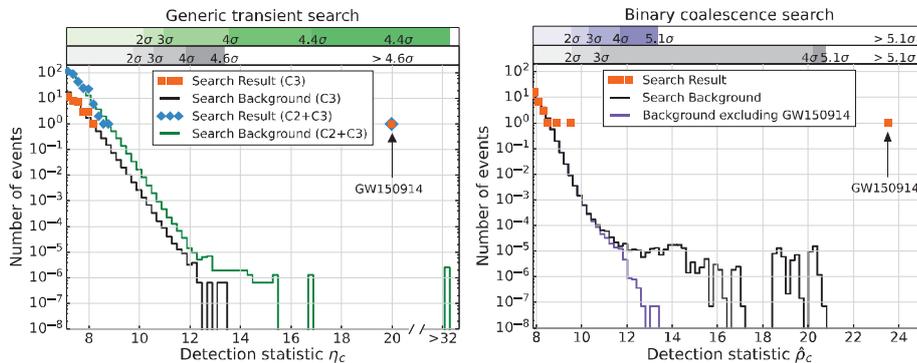


FIG. 4. Search results from the generic transient search (left) and the binary coalescence search (right). These histograms show the number of candidate events (orange markers) and the mean number of background events (black lines) in the search class where GW150914 was found as a function of the search detection statistic and with a bin width of 0.2. The scales on the top give the significance of an event in Gaussian standard deviations based on the corresponding noise background. The significance of GW150914 is greater than  $5.1\sigma$  and  $4.6\sigma$  for the binary coalescence and the generic transient searches, respectively. *Left:* Along with the primary search (C3) we also show the results (blue markers) and background (green curve) for an alternative search that treats events independently of their frequency evolution (C2 ( C3)). The classes C2 and C3 are defined in the text. *Right:* The tail in the black-line background of the binary coalescence search is due to random coincidences of GW150914 in one detector with noise in the other detector. (This type of event is practically absent in the generic transient search background because they do not pass the time-frequency consistency requirements used in that search.) The purple curve is the background excluding those coincidences, which is used to assess the significance of the second strongest event.

For robustness and validation, we also use other generic transient search algorithms [41]. A different search [73] and a parameter estimation follow-up [74] detected GW150914 with consistent significance and signal parameters.

### B. Binary coalescence search

This search targets gravitational-wave emission from binary systems with individual masses from 1 to  $99M_{\odot}$ , total mass less than  $100M_{\odot}$ , and dimensionless spins up to 0.99 [44]. To model systems with total mass larger than  $4M_{\odot}$ , we use the effective-one-body formalism [75], which combines results from the post-Newtonian approach [11,76] with results from black hole perturbation theory and numerical relativity. The waveform model [77,78] assumes that the spins of the merging objects are aligned with the orbital angular momentum, but the resulting templates can, nonetheless, effectively recover systems with misaligned spins in the parameter region of GW150914 [44]. Approximately 250 000 template waveforms are used to cover this parameter space.

The search calculates the matched-filter signal-to-noise ratio  $\rho$  for each template in each detector and identifies maxima of  $\rho$  with respect to the time of arrival of the signal [79–81]. For each maximum we calculate a chi-squared statistic  $\chi_r^2$  to test whether the data in several different frequency bands are consistent with the matching template [82]. Values of  $\chi_r^2$  near unity indicate that the signal is consistent with a coalescence. If  $\chi_r^2$  is greater than unity,  $\rho$  is reweighted as  $\hat{\rho} = (\rho / \chi_r^2)^{1/2}$  [83,84]. The final step enforces coincidence between detectors by selecting event pairs that occur within a 15-ms window and come from the same template. The 15-ms window is determined by the 10-ms intersite propagation time plus 5 ms for uncertainty in arrival time of weak signals. We rank coincident events based on the quadrature sum  $\hat{\rho}_c$  of the  $\hat{\rho}$  from both detectors [45].

To produce background data for this search the SNR maxima of one detector are time shifted and a new set of coincident events is computed. Repeating this procedure  $\sim 10^7$  times produces a noise background analysis time equivalent to 608 000 years.

To account for the search background noise varying across the target signal space, candidate and background events are divided into three search classes based on template length. The right panel of Fig. 4 shows the background for the search class of GW150914. The GW150914 detection-statistic value of  $\hat{\rho}_c = 23.6$  is larger than any background event, so only an upper bound can be placed on its false alarm rate. Across the three search classes this bound is 1 in 203 000 years. This translates to a false alarm probability  $< 2 \times 10^{-7}$ , corresponding to  $5.1\sigma$ .

A second, independent matched-filter analysis that uses a different method for estimating the significance of its events [85,86], also detected GW150914 with identical signal parameters and consistent significance.

TABLE I. Source parameters for GW150914. We report median values with 90% credible intervals that include statistical errors, and systematic errors from averaging the results of different waveform models. Masses are given in the source frame; to convert to the detector frame multiply by  $(1+z)$  [90]. The source redshift assumes standard cosmology [91].

Primary black hole mass	$36_{-4}^{+5} M_{\odot}$
Secondary black hole mass	$29_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole mass	$62_{-4}^{+4} M_{\odot}$
Final black hole spin	$0.67_{-0.07}^{+0.05}$
Luminosity distance	$410_{-180}^{+160}$ Mpc
Source redshift $z$	$0.09_{-0.04}^{+0.03}$

When an event is confidently identified as a real gravitational-wave signal, as for GW150914, the background used to determine the significance of other events is reestimated without the contribution of this event. This is the background distribution shown as a purple line in the right panel of Fig. 4. Based on this, the second most significant event has a false alarm rate of 1 per 2.3 years and corresponding Poissonian false alarm probability of 0.02. Waveform analysis of this event indicates that if it is astrophysical in origin it is also a binary black hole merger [44].

## VI. SOURCE DISCUSSION

The matched-filter search is optimized for detecting signals, but it provides only approximate estimates of the source parameters. To refine them we use general relativity-based models [77,78,87,88], some of which include spin precession, and for each model perform a coherent Bayesian analysis to derive posterior distributions of the source parameters [89]. The initial and final masses, final spin, distance, and redshift of the source are shown in Table I. The spin of the primary black hole is constrained to be  $< 0.7$  (90% credible interval) indicating it is not maximally spinning, while the spin of the secondary is only weakly constrained. These source parameters are discussed in detail in [39]. The parameter uncertainties include statistical errors and systematic errors from averaging the results of different waveform models.

Using the fits to numerical simulations of binary black hole mergers in [92,93], we provide estimates of the mass and spin of the final black hole, the total energy radiated in gravitational waves, and the peak gravitational-wave luminosity [39]. The estimated total energy radiated in gravitational waves is  $3.0_{-0.5}^{+0.5} M_{\odot} c^2$ . The system reached a peak gravitational-wave luminosity of  $3.6_{-0.4}^{+0.5} \times 10^{56}$  erg/s, equivalent to  $200_{-20}^{+30} M_{\odot} c^2/s$ .

Several analyses have been performed to determine whether or not GW150914 is consistent with a binary

black hole system in general relativity [94]. A first consistency check involves the mass and spin of the final black hole. In general relativity, the end product of a black hole binary coalescence is a Kerr black hole, which is fully described by its mass and spin. For quasicircular inspirals, these are predicted uniquely by Einstein's equations as a function of the masses and spins of the two progenitor black holes. Using fitting formulas calibrated to numerical relativity simulations [92], we verified that the remnant mass and spin deduced from the early stage of the coalescence and those inferred independently from the late stage are consistent with each other, with no evidence for disagreement from general relativity.

Within the post-Newtonian formalism, the phase of the gravitational waveform during the inspiral can be expressed as a power series in  $f^{1/3}$ . The coefficients of this expansion can be computed in general relativity. Thus, we can test for consistency with general relativity [95,96] by allowing the coefficients to deviate from the nominal values, and seeing if the resulting waveform is consistent with the data. In this second check [94] we place constraints on these deviations, finding no evidence for violations of general relativity.

Finally, assuming a modified dispersion relation for gravitational waves [97], our observations constrain the Compton wavelength of the graviton to be  $\lambda_g > 10^{13}$  km, which could be interpreted as a bound on the graviton mass  $m_g < 1.2 \times 10^{-22}$  eV/ $c^2$ . This improves on Solar System and binary pulsar bounds [98,99] by factors of a few and a thousand, respectively, but does not improve on the model-dependent bounds derived from the dynamics of Galaxy clusters [100] and weak lensing observations [101]. In summary, all three tests are consistent with the predictions of general relativity in the strong-field regime of gravity.

GW150914 demonstrates the existence of stellar-mass black holes more massive than  $\odot 25M_\odot$ , and establishes that binary black holes can form in nature and merge within a Hubble time. Binary black holes have been predicted to form both in isolated binaries [102–104] and in dense environments by dynamical interactions [105–107]. The formation of such massive black holes from stellar evolution requires weak massive-star winds, which are possible in stellar environments with metallicity lower than  $\odot 1/2$  the solar value [108,109]. Further astrophysical implications of this binary black hole discovery are discussed in [110].

These observational results constrain the rate of stellar-mass binary black hole mergers in the local universe. Using several different models of the underlying binary black hole mass distribution, we obtain rate estimates ranging from 2–400  $\text{Gpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$  in the comoving frame [111–113]. This is consistent with a broad range of rate predictions as reviewed in [114], with only the lowest event rates being excluded.

Binary black hole systems at larger distances contribute to a stochastic background of gravitational waves from the superposition of unresolved systems. Predictions for such a

background are presented in [115]. If the signal from such a population were detected, it would provide information about the evolution of such binary systems over the history of the universe.

## VII. OUTLOOK

Further details about these results and associated data releases are available at [116]. Analysis results for the entire first observational period will be reported in future publications. Efforts are under way to enhance significantly the global gravitational-wave detector network [117]. These include further commissioning of the Advanced LIGO detectors to reach design sensitivity, which will allow detection of binaries like GW150914 with 3 times higher SNR. Additionally, Advanced Virgo, KAGRA, and a possible third LIGO detector in India [118] will extend the network and significantly improve the position reconstruction and parameter estimation of sources.

## VIII. CONCLUSION

The LIGO detectors have observed gravitational waves from the merger of two stellar-mass black holes. The detected waveform matches the predictions of general relativity for the inspiral and merger of a pair of black holes and the ringdown of the resulting single black hole. These observations demonstrate the existence of binary stellar-mass black hole systems. This is the first direct detection of gravitational waves and the first observation of a binary black hole merger.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors gratefully acknowledge the support of the United States National Science Foundation (NSF) for the construction and operation of the LIGO Laboratory and Advanced LIGO as well as the Science and Technology Facilities Council (STFC) of the United Kingdom, the Max-Planck Society (MPS), and the State of Niedersachsen, Germany, for support of the construction of Advanced LIGO and construction and operation of the GEO 600 detector. Additional support for Advanced LIGO was provided by the Australian Research Council. The authors gratefully acknowledge the Italian Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), the French Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), and the Foundation for Fundamental Research on Matter supported by the Netherlands Organisation for Scientific Research, for the construction and operation of the Virgo detector, and for the creation and support of the EGO consortium. The authors also gratefully acknowledge research support from these agencies as well as by the Council of Scientific and Industrial Research of India, Department of Science and

## 5 Danksagung

Ich danke hiermit meinem Vater, der mich immer unterstützt hat. Ebenfalls bedanke ich mich bei Michler Wolfgang, der mir mit seinen Inputs ermöglicht hat, die Datenanalyse weiterzuführen.

Ein grosses Dankeschön geht an meine betreuenden Lehrpersonen Dr. rer. nat. Chiantese Stefano und Daniel Coderre. Die sich viele Stunden Zeit genommen haben, um mir das Thema näher zubringen und mit mir alles zu besprechen. Darum haben sie einen sehr wichtigen Teil zu dieser Arbeit beigetragen. Weiter hat Herr Chiantese mir geholfen meine wissenschaftliche Arbeit zu verfassen. Ich bin Ihnen sehr dankbar.



## 6 Deklaration

„Ich erkläre hiermit,

- dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst habe,
- dass ich auf eine eventuelle Mithilfe Dritter in der Arbeit ausdrücklich hinweise,
- dass ich vorgängig die Schulleitung und die betreuende Lehrperson informiere, wenn ich diese Maturaarbeit, bzw. Teile oder Zusammenfassungen davon veröffentlichen werde, oder Kopien dieser Arbeit zur weiteren Verbreitung an Dritte aushändigen werde.“

Ort:

Datum:

Unterschrift: