

Maturaarbeit 2006
im Fach Physik

Minimumprinzipien



Autor:

Linda Staub, 6d
Hubermatte 15
6252 Dagmersellen

Betreuer:

Dr. Jerzy Stromicki
Kirchstrasse 9
8107 Buchs ZH

Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	1
2.	Fermat'sches Prinzip.....	2
2.1	Lösung	2
2.2	Konkretes Beispiel.....	3
3.	Die Euler- Lagrange Gleichung	5
4.	Das Problem des kürzesten Wegs	8
5.	Bernoullis brachistochrone Problem	10
6.	Minimumprinzipien in der klassischen Mechanik.....	13
6.1	Freie Bewegung	13
6.2	Die Newton'schen Bewegungsgleichungen als Folge des Variations-prinzip	15
7.	Minimumprinzipien in der Relativitätstheorie	17
8.	Kette	19
8.1	Vergleich mit Parabel.....	19
8.2	Vergleich mit Kettenkurve	20
9.	Seifenblasen.....	22
9.1	Kugel	22
9.2	Katenoid	23
9.2.1	Experimentell	23
9.2.2	Theoretisch	25
9.3	Experiment: Fläche in einem Kreisring	26
10.	Reflexionen.....	27
11.	Bibliographie	27
12.	Dank	28
13.	Deklaration	28

1. Einleitung

Haben Sie sich schon einmal gefragt, weshalb die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist? Oder warum Seifenblasen Kugeln sind und nicht als Form von Würfeln oder Dreiecken auftreten? Warum sich ein Lichtstrahl bricht, wenn er in Wasser eintritt?

Um solche Fragen beantworten zu können, muss man sich einer wichtigen Eigenschaft der Natur bewusst sein. "Die Natur macht nichts umsonst; und jedes *Mehr* ist umsonst, wenn ein *Weniger* ausreicht." (Isaac Newton „Prinzipia“). Unsere Natur versucht mit einem Höchstmass an Sparsamkeit zu handeln, also nach einem gewissen Minimumprinzip. Das tut sie, indem sie den Aufwand minimiert.

Diese faszinierende und seltsame Eigenschaft widerspiegelt sich zum Beispiel im Benehmen des Lichts. Das Licht sucht den Weg, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, der die kürzeste Zeit erfordert.

Die Kenntnis, dass die Natur so sparsam wie möglich handelt, erlaubt uns, diese Probleme von einem anderen Standpunkt zu betrachten und ist nicht zuletzt der entscheidende Ansatz, um sie zu lösen.

Mathematisch gesehen suchen wir eine Funktion, die ein bestimmtes Kriterium zu erfüllen hat; ein Ausdruck, in welchem die Funktion selber und deren Ableitungen auftreten, soll den Minimalwert erreichen. Dafür wurde ein neues Gebiet der Mathematik errichtet, was als Variationsrechnung bezeichnet wird. Die schweizer Mathematiker Jacob und Johann Bernoulli und Leonhard Euler gelten als Begründer dieser Mathematik. Die Lösung von Variationsproblemen führt meistens auf Differenzialgleichungen.

Das Ganze mag theoretisch kompliziert klingen, doch in der Praxis ist es einfacher als man denkt. Wir lösen ständig Variationsprobleme, auch im täglichen Leben.

Wenn wir zum Beispiel im Auto sitzen, in den Süden fahren, dann überlegen wir uns den schnellsten Weg zu unserem Ziel. Der kürzeste ist natürlich der Weg durch den Gotthardtunnel. Doch ist es auch der schnellste? Wenn wir 10 km im Stau stehen, dann beginnen wir zu spekulieren, den doch längeren Weg über den Gotthardpass zu wählen, um schneller an unser Ziel zu gelangen. Wir handeln also wie das Licht nach dem Prinzip der kürzesten Zeit.

In meiner Arbeit habe ich verschiedene geometrische Variationsprobleme ausgewählt und sie analysiert. Zu einem späteren Zeitpunkt wurden dann die klassische Mechanik, sowie auch die Relativitätstheorie miteinbezogen. Mit dem Ziel, möglichst viel über diese Mathematik kennen zu lernen und sie zu verstehen.

Diese Arbeit soll als Einführung in diese faszinierende Mathematik und Physik dienen.

2. Fermat'sches Prinzip

Das Fermat'sche Prinzip wird auch das *Prinzip der kürzesten Zeit* genannt und ist als das älteste bekannte Minimumprinzip formuliert. Es wurde von Pierre Fermat, der Jurist war, um 1650 gefunden. [2]

Das Licht wird von allen Wegen, die es nehmen könnte, denjenigen wählen, für den es die kürzeste Zeit benötigen wird. Somit ist das Brechen des Lichts auch erklärt. Da das Licht sich in Wasser langsamer verbreitet als in der Luft, wird ein Lichtstrahl versuchen, einen längeren Weg in der Luft zu gehen, um so die Gesamtzeit zu minimieren.

Analoges Problem bildet folgende Situation:

Ein Mädchen ist aus dem Boot gefallen und schreit im Wasser bei Punkt B um Hilfe. xx stellt die Uferlinie dar. Ein Rettungsschwimmer ist bei Punkt A am Strand und sieht das Mädchen in Bedrängnis. Er kann sehr gut laufen und auch schwimmen. Er kann aber schneller laufen als schwimmen. Welchen Weg wird er wählen?

2.1 Lösung

Es scheint selbstverständlich, dass die kürzeste Zeit mit einer Geraden am Strand und einer im Wasser erreicht werden kann. (Ein Beweis folgt bei Kapitel 4)

Skizze

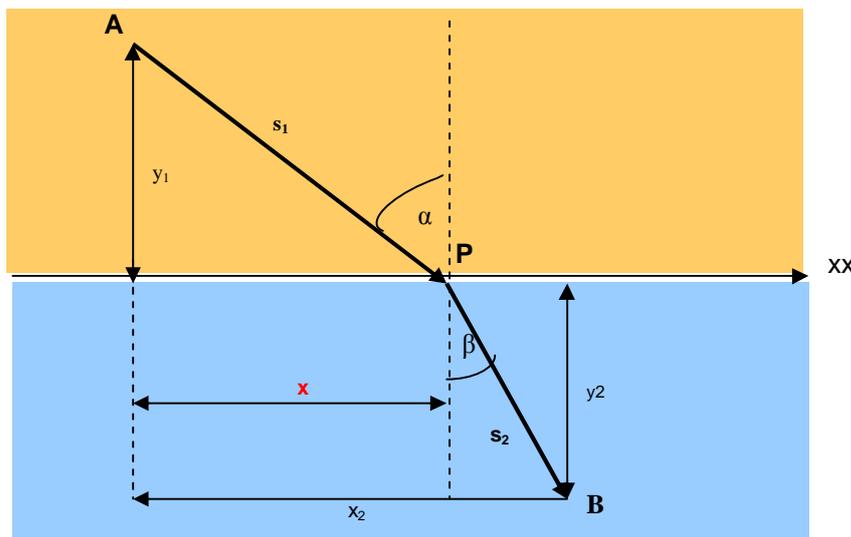


Abb.1. Definition der Variablen für ein Rettungsschwimmer- Problem.

Lösung

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{1}{v_1} \sqrt{x^2 + y_1^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = \boxed{\frac{x}{v_1 s_1} - \frac{x_2 - x}{v_2 s_2}} \quad (2.1)$$

daraus folgt das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{s_1} \quad \sin(\beta) = \frac{x_2 - x}{s_2}$$

$$\rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.2)$$

2.2 Konkretes Beispiel

Um das Ganze auch numerisch zu veranschaulichen werden nun konkrete Zahlen für die Parameter verwendet. Angenommen der Rettungsschwimmer ist fähig, 100 m in 9.79 s zu laufen wie Maurice Green. Der junge Mann kann aber auch so schnell schwimmen wie Alexander Popov, der Weltrekordhalter über 100m Freistil. Popovs Rekordzeit beträgt 48,21s. Welchen Weg wird der junge Mann jetzt wählen?

Numerische Lösung:

$$v_1 = \frac{100m}{9,79s} = 10,2 \frac{m}{s} \quad y_1 = 50m \quad x_2 = 120m$$

$$v_2 = \frac{100m}{48,21s} = 2,1 \frac{m}{s} \quad y_2 = 50m$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2 \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} \rightarrow \underline{\underline{x = 110,5m}}$$

Graphische Darstellung im Massstab 1:1000

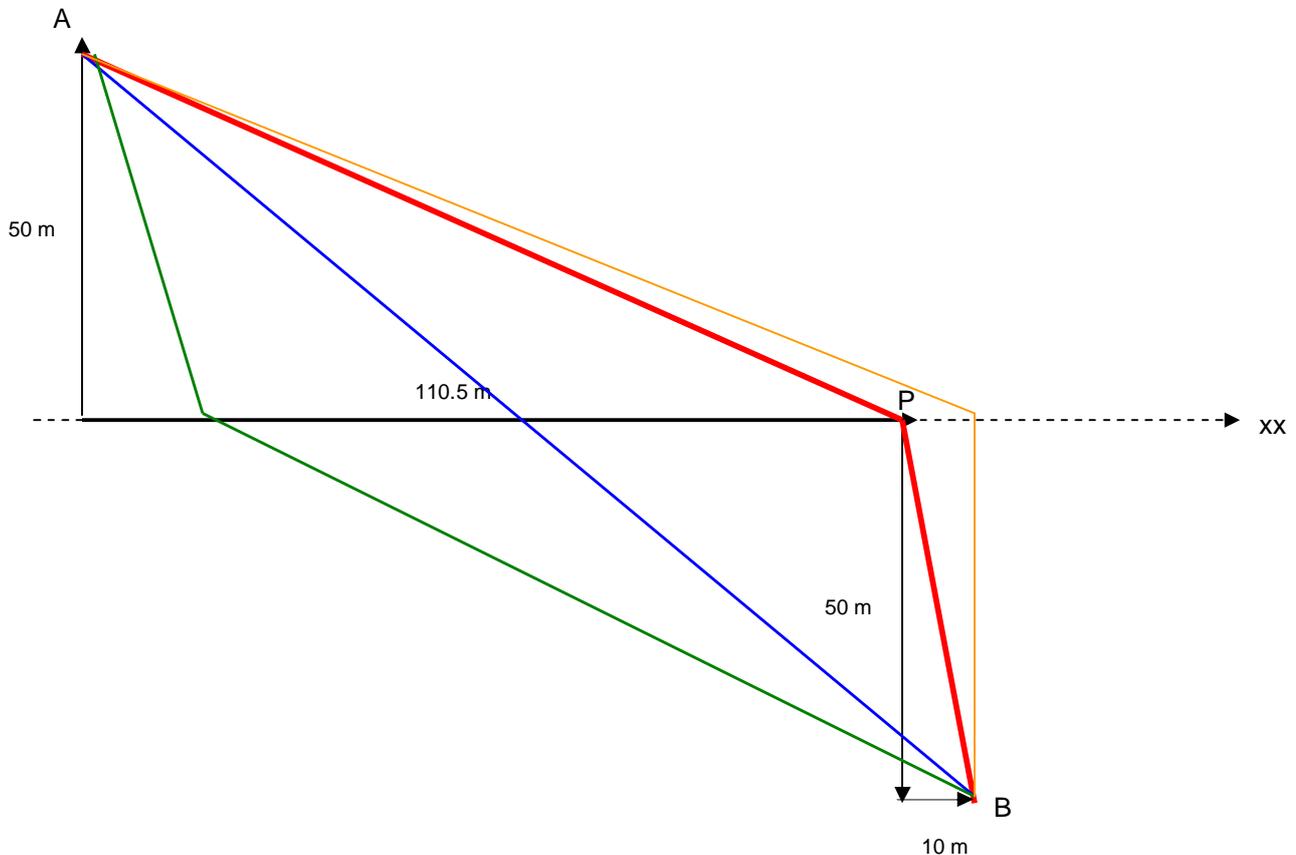


Abb. 2. Graphische Darstellung der Lösung des Rettungsschwimmer- Problems für die extremen Werte der Parameter. Der rote Weg stellt den Weg dar, für den der Rettungsschwimmer die kürzeste Zeit erfordert. Alle anderen Wege ergeben grössere Zeiten von A nach B.

Grün $\approx 58.96s$ Blau $\approx 44.01s$
Rot $\approx 36.22s$ Orange $\approx 36.62s$

Zusammenfassung:

Der Trick für das einfache Lösen dieser Aufgabe war, dass wir nur eine begrenzte Klasse der Funktionen betrachtet haben. Wir sind schon davon ausgegangen, dass die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, doch das muss natürlich erst bewiesen werden (siehe Kapitel 4).

3. Die Euler- Lagrange Gleichung

Nicht immer ist es möglich, ein Problem allgemein so weit zu vereinfachen wie beim Fermat'schen Prinzip. Somit war das Bestreben sehr gross, ein Lösungsverfahren zu finden, mit dem man jedes Variationsproblem lösen kann.

1744 entdeckte Euler die *Euler- Lagrange Gleichung*, welche die Grundlage für das Lösen von Variationsproblemen bildet.

Ich stelle hier meine Zusammenfassung dieser Herleitung dar. Meine Formulierung folgt [1]

Herleitung

Wir suchen eine Gleichung, die uns dieses Integral

$$I = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y') dx$$

minimiert.

- Die Funktion, die I minimieren wird, nennen wir $y(x)$.
- ε ist der Parameter, der alle möglichen Funktionen nummeriert.
- Die verschiedenen Testfunktionen nennen wir $\bar{y}(x, \varepsilon)$, wobei diese folgende Bedingungen erfüllen:

- a) $\bar{y}(x_A, \varepsilon) = y_A$, $\bar{y}(x_B, \varepsilon) = y_B$ für alle ε
- b) $\bar{y}(x, 0) = y(x)$, unsere gewünschte Funktion, die das Integral minimiert
- c) $\bar{y}(x, \varepsilon)$ und alle Ableitungen sind abhängig von x und ε

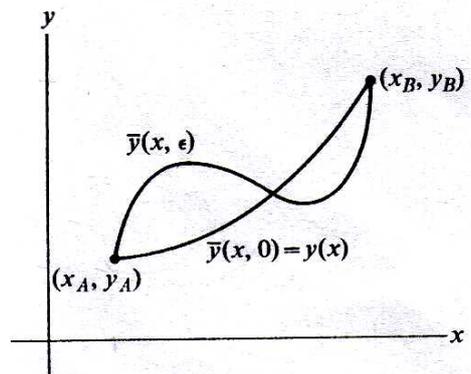


Abb. 3. Die gesuchte Funktion $\bar{y}(x, 0) = y(x)$ und eine der Vergleichsfunktionen $\bar{y}(x, \varepsilon)$.

1. Schritt

Für eine gegebene Testfunktion ist das Integral eine Funktion von ε .

$$I(\varepsilon) = \int_{x_A}^{x_B} f(x, y, y') dx$$

2. Schritt

$$\left[\frac{dI}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{ist eine notwendige Bedingung für das Integral, um bei } \varepsilon = 0 \text{ einen minimalen Wert einzunehmen.} \quad (3.1)$$

3. Schritt

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon} \right] dx \quad (3.2)$$

Es wird folgende Äquivalenz angewendet, was nichts anderes ist, als die Kettenregel.

$$\frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\text{Kettenregel: } \frac{d}{dx} [f(g(x))] = \frac{d}{dg} f(g) \frac{d}{dx} g(x).$$

4. Schritt

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \right) \right] dx \quad (3.3)$$

Aufgrund der Bedingung c) ist das äquivalent zum 3. Schritt.

5. Schritt

Partielle Integration des 2. Terms

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} dx + \left[\frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_A}^{x_B} - \int_{x_A}^{x_B} \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \quad (3.4)$$

6. Schritt

$$\left. \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \right|_{x=x_A} = 0 = \left. \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} \right|_{x=x_B} \quad (3.5)$$

Aufgrund der Bedingung a), dass $\bar{y}(x_A, \varepsilon) = y_A$ und $\bar{y}(x_B, \varepsilon) = y_B$ für alle ε , ergibt sich schlussendlich

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} dx \quad (3.6)$$

$I(\varepsilon)$ hat ein Minimum bei $\varepsilon=0$, somit gilt

$$\left[\frac{dI}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\varepsilon=0} \left[\frac{dy}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} dx \quad (3.7)$$

7. Schritt

Wenn wir $\varepsilon=0$ setzen, dann gilt $\bar{y}(x, \varepsilon) = y(x)$, $\bar{y}'(x, \varepsilon) = y'(x)$, $\bar{y}''(x, \varepsilon) = y''(x)$.

$\frac{dy}{d\varepsilon}$ kann nicht null sein, somit muss

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0} \text{ gelten.} \quad (3.8)$$

Um die einzelnen Schritte besser zu verstehen, sind hier noch einige Beispiele angefügt.

Beispiele

zu Schritt 3

1. Beispiel: $f(x, y = x^2) = x \cdot y$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cdot x^2) = \frac{d}{dx}(x^3) = \underline{\underline{3x^2}} \quad \frac{\partial}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = y + x \cdot 2x = x^2 + 2x^2 = \underline{\underline{3x^2}}$$

2. Beispiel: $f(x, y = e^x) = x \cdot y$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cdot e^x) = \underline{\underline{(x+1) \cdot e^x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = y + x \cdot e^x = e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1) \cdot e^x}}$$

zu Schritt 5

$$\int f \cdot g' = \int (f \cdot g)' - \int f' \cdot g$$

1. Beispiel: $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$

$$\int f \cdot g' = \int x^2 \cdot e^x = \underline{\underline{(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x}}$$

$$\int (f \cdot g)' - \int f' \cdot g = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x-1) \cdot e^x = \underline{\underline{(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x}}$$

2. Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3$

$$\int f \cdot g' = \int \frac{1}{x} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{3 \cdot x^2}{2}}}$$

$$\int (f \cdot g)' - \int f' \cdot g = x^2 - \frac{-x^2}{2} = \underline{\underline{\frac{3 \cdot x^2}{2}}}$$

4. Das Problem des kürzesten Wegs

Die Lösung dieses Problems ist uns intuitiv schon bekannt. Für jedermann ist es selbstverständlich, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten eine Gerade ist.

Im Folgenden wird versucht, diese Behauptung unter Anwendung der Euler-Lagrange Gleichung zu beweisen. [1]

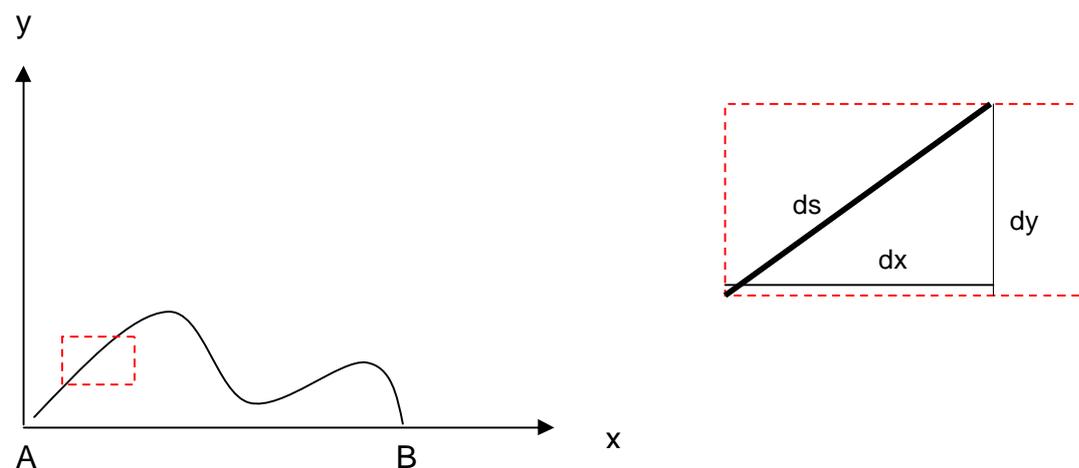


Abb.4. Darstellung des Problems des kürzesten Wegs.

In der Skizze sehen wir eine Kurve, die eine Verbindung zwischen dem Punkt A und B darstellt. Unser Ziel ist es, die Länge dieser Kurve zu minimieren, wobei

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} \quad \text{das infinitesimale Längenelement ist.} \quad (4.1)$$

Somit ist die Summe aller ds

$$\sum ds = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dx}\right)^2} dx = \int_A^B \sqrt{y'^2 + 1} dx \quad (4.2)$$

$$\rightarrow \int_A^B \sqrt{y'^2 + 1} dx = \text{MINIMUM} \quad (4.3)$$

Wir haben jetzt die Lagrange- Funktion gefunden, die in die Euler- Lagrange Gleichungen einzusetzen ist. Sie lautet $\sqrt{y'^2 + 1}$. Im Folgendem nennen wir diese Funktion *Lagrangian*.

→ Die Euler- Lagrange Gleichung kann nun angewendet werden.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Es gelten:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{y'^2 + 1}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial \sqrt{y'^2 + 1}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} \quad (4.4)$$

Somit übergeht die Euler- Lagrange Gleichung in:

$$\rightarrow \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}} = 0 \quad (4.5)$$

→ Wir benützen die Quotientenregel und die Kettenregel, was zur folgender

$$\text{Bedingung führt: } y'' \cdot \left(\frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{y'^2 + 1} - \frac{y'^2}{\sqrt{(y'^2 + 1)^3}} \right) = 0, \text{ welche nach Vereinfachung} \quad (4.6)$$

die einfachste

Differenzialgleichung 2. Ordnung ergibt:

$$\rightarrow y'' = 0 \quad (4.7)$$

Die Lösung ist

$$\rightarrow y = C_1 x + C_2, \text{ wobei die Konstanten } C_1 \text{ und } C_2 \text{ so gewählt werden} \quad (4.8)$$

müssen, dass die Gerade durch die Punkte $A(x_A, y_A)$ und $B(x_B, y_B)$ geht.

Zusammenfassung

Mit diesem Beispiel habe ich Vertrauen in meine Anwendung der Regeln der Differenzialrechnung gewonnen. Ich finde, dass die kritische Stelle die korrekte Anwendung der Kettenregel (siehe Beispiele auf S.7) ist.

Dieses Beispiel zeigt explizit, dass die Euler- Lagrange Gleichung zu einer Differenzialgleichung 2. Ordnung für die gesuchte Funktion $y = y(x)$ führt.

5. Bernoullis brachistochrone Problem

1696 befasste sich Johann Bernoulli von der Universität Basel mit folgendem Problem [1]:

Gesucht ist die Bahn (Funktion), auf der ein Massenpunkt im homogenen Schwerfeld in kürzester Zeit von einem Startpunkt A (0/0) den Zielpunkt B (x_B / y_B) erreicht. Die Reibung ist als vernachlässigbar zu betrachten.

Der Name kommt aus dem Griechischen (*brachistos*= kürzeste, *chronos*= Zeit).

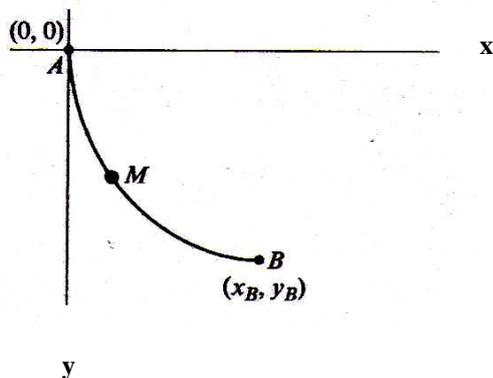


Abb. 5. Bernoullis brachistochrone.

Der erste Schritt besteht darin, das Lagrangian zu suchen.

Wir wissen aus dem vorherigen Kapitel, dass

$$ds = \sqrt{dy^2 + dx^2} \text{ das infinitesimale Längenelement ist.} \quad (5.1)$$

Die Summe aller ds , also die Kurvenlänge, ist somit:

$$\sum ds = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{y'^2 + 1} \, dx \quad (5.2)$$

Diesmal muss aber die Zeit minimiert werden.

Somit gilt:

$$dt = \frac{ds}{v}, \text{ wobei } v \text{ die Geschwindigkeit des Massenpunktes ist.} \quad (5.3)$$

Das Integral lautet dann:

$$I = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_A^B \frac{\sqrt{y'^2 + 1}}{v} \, dx. \quad (5.4)$$

Wir merken, dass v eine Funktion der Höhe y sein muss, aufgrund der unkonventionellen Wahl der y - Achse (nach unten).

Somit gilt aufgrund der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \rightarrow v = \sqrt{2gy} \quad (5.5)$$

Und für unser Integral erhalten wir:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx \quad (5.6)$$

$\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ist für die Suche von $y(x)$ ein irrelevanter Faktor.

Unser Lagrangian lautet somit: $\boxed{\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}}$ (5.7)

Überraschenderweise bin ich zum Entschluss gekommen, dass die Euler- Lagrange Gleichung in Standardform zu recht komplizierten Ausdrücken führt. Somit ist es sinnvoll, nach Vereinfachungen zu suchen.

Vereinfachung

Die Funktion $f(x, y, y')$ ist nicht explizit von x abhängig, nur von y und y' .

Mit diesem Gedanken im Hintergrund betrachten wir $\frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right]$. (5.8)

Wir leiten ab.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right] &= y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{\partial f}{\partial y'} y'', \text{ wobei} \\ \frac{d}{dx} f(x, y, y') &= \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} \\ &= -y' \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] - \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wir wissen, dass die Euler- Lagrange Gleichung null ergeben muss.

Wenn nun f nicht explizit von x abhängig ist, dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ und der 2. Term ergibt auch 0.}$$

Somit gilt auch:
$$\frac{d}{dx} \left[y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right] = 0. \quad (5.10)$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet:

$$\boxed{y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const.}} \quad (5.11)$$

Diese Gleichung 1. Ordnung ist wesentlich einfacher als die ursprüngliche Euler-Lagrange Gleichung. Sie erspart uns viel Aufwand, ist aber nur gültig, wenn f nicht explizit von x abhängig ist.

Man merkt auch, dass eine Integrationskonstante, welche der Reduktion von 2. auf 1. Ordnung entspricht, schon zum Vorschein gekommen ist.

Unser Lagrangian lautet gemäss (5.7):

$$\boxed{\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}}$$

Somit ergibt die Gleichung:

$$\frac{y'^2}{\sqrt{y(1+y'^2)}} - \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = C \quad (5.12)$$

$$\rightarrow \frac{1}{y(1+y'^2)} = C^2$$

→ Es zeigt sich bequem (siehe unten) $\frac{1}{C^2}$ mit $2a$ zu ersetzen.

Man erhält:

$$y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}} \quad (5.13)$$

→ Diese Differenzialgleichung wird durch Trennung der Variablen gelöst.

$$\int dy \cdot \sqrt{\frac{y}{2a-y}} = \int_{x_0}^x dx$$

Man erhält:
$$x - x_0 = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy. \quad (5.14)$$

Wenn man y mit $a(1 - \cos \theta)$ ersetzt, dann lautet das Integral:

$$x - x_0 = 2a \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = a(\theta - \sin \theta). \quad (5.15)$$

Somit erhalten wir für die Lösung des brachistochrone Problems:

$$x = a(\theta - \sin \theta) + x_0 \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (5.16)$$

(Lösung in parametrischer Form)

Diese Gleichungen sind mir schon vom Unterricht als parametrische Darstellung der Zykloide bekannt.

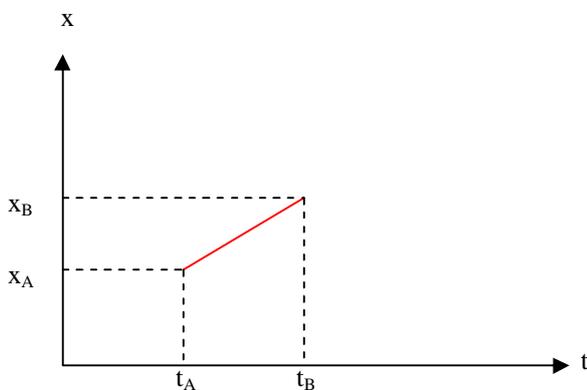
6. Minimumprinzipien in der klassischen Mechanik

Mit Mathematik der Variationsrechnung ist es auch möglich einen grossen Teil der klassischen Mechanik auszudrücken. Ich werde hier versuchen, die Argumente für die Anwendung des Variationsprinzips in der Mechanik zu schildern.

6.1 Freie Bewegung

Als ersten Schritt betrachten wir eine eindimensionale Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Die potentielle Energie ist immer gleich.

Es resultiert die bekannte, einfachste Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.



$$x(t) = v_0 \cdot t + x_0$$

$$v = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (6.1)$$

Abb.6. Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

Nun stellt sich die Frage, was als Lagrangian gewählt werden soll.

An dieser Stelle führen wir ein Gedankenexperiment durch.

Die Idee ist: Die Energie repräsentiert den „Aufwand“ der Natur. Versucht die Natur ihren Aufwand zu optimieren oder evtl. zu minimieren?

Wir versuchen es mit der Wahl der kinetischen Energie als Lagrangian.

$$E = \frac{mv^2}{2} \approx v^2$$

Unsere Funktion f lautet somit: $\boxed{v^2}$ (6.2)

Die Euler- Lagrange Gleichung kann nun angewendet werden.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0$$

$$-\frac{d}{dt} 2v = 0$$

$$-\frac{d}{dt} v = 0, \text{ wobei } v = \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad (6.3)$$

$$\rightarrow x(t) = C_1 t + C_2 \quad (6.4)$$

Diese Gerade sollte aber durch $A(x_A, t_A)$ und $B(x_B, t_B)$ verlaufen. Die Konstantenabstimmung führt zu:

$$x(t) = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} (t - t_A) + x_A \quad (6.5)$$

Die kinetische Energie erreicht also das Minimum für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

Folgerung: Die Wahl der kinetischen Energie als Lagrangian führt zur richtigen Lösung für die freie Bewegung.

6.2 Die Newton'schen Bewegungsgleichungen als Folge des Variationsprinzips

Wenn nun aber nicht nur die kinetische Energie im Spiel ist, sondern auch die potentielle Energie, dann muss das Lagrangian folgendermassen konstruiert sein:

$$L(t, q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i, t), \text{ wobei } T = \text{kin. Energie und} \quad (6.6)$$

$V = \text{potentielle Energie.}$

Es wird in einem späteren Schritt darauf eingegangen, weshalb die potentielle Energie von der kinetischen Energie subtrahiert werden muss und nicht addiert.

Unser Integral lautet dann:

$$I = \int_{t_A}^{t_B} L \, dt$$

Angenommen,

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right)$$

$$V = V(x_1, x_2, x_3)$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 \right) - V(x_1, x_2, x_3) \quad (6.7)$$

Somit ergibt die Euler- Lagrange Gleichung:

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(m \cdot \dot{x}_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.8)$$

oder

$$m \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (6.9)$$

Solange $-\frac{\partial V}{\partial x_i}$ die Kraft des Teilchens in die x_i - Richtung ist, ist es nichts anderes als das 2. Newtonsche Gesetz.

$$m \ddot{r} = -\Delta V = F \quad (6.10)$$

Folgerung: Die Wahl des Lagrangians als die kinetische Energie minus die potentielle Energie führt zur richtigen Lösung.

Es stellt sich nun die Frage, weshalb nicht $T+V$ in die Euler- Lagrange Gleichung eingesetzt wird, da ja $T+V$ die Gesamtenergie ist. Um das zu überprüfen, versuchen wir es mit dem Lagrangian $L = T + \lambda \cdot V$.

Wir verlangen, dass $\int_{t_A}^{t_B} (T + \lambda \cdot V) dt = MIN$.

Wir wenden die Euler- Lagrange Gleichung an.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} =: \vec{p}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \lambda \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \lambda \frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$$

, wobei aufgrund der Newton'schen

Gesetze Folgendes gilt: $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$

→ Daraus folgt: $\lambda = -1$ und $L = T - V$

7. Minimumprinzipien in der Relativitätstheorie

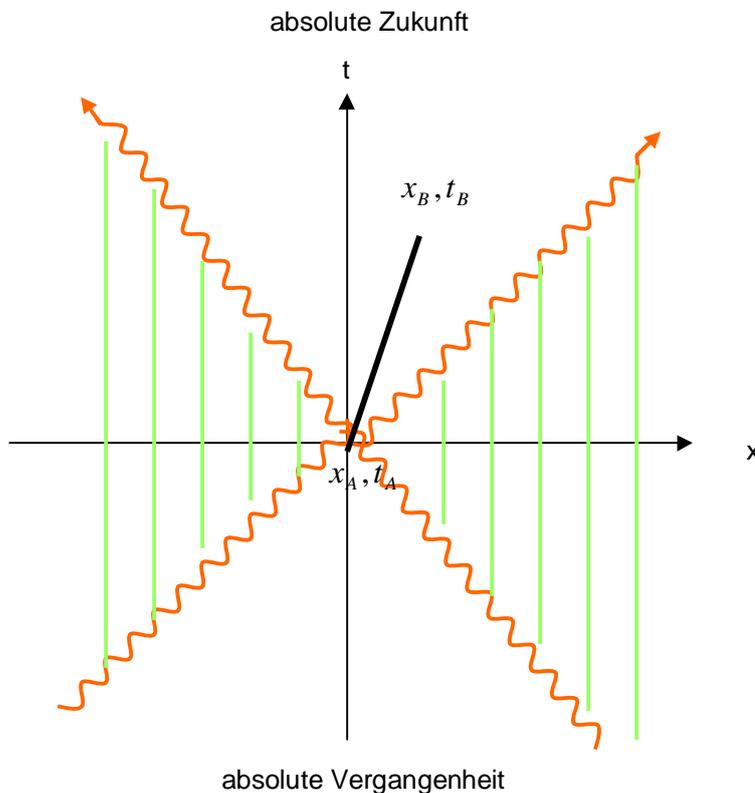


Abb.7. Bezugssystem für Bewegung in der Relativitätstheorie.

Lichtgeschwindigkeit

Nicht zu erreichende Geschwindigkeiten ($v > c$)

Es stellt sich die Frage, was als Lagrangian gewählt werden soll.

Als invariantes Abstand- Element (Raum- Zeit Abstand) in der Relativitätstheorie gilt:

$dt^2 - dx^2$, wobei die physikalische Bedeutung die Eigenzeit ist.

Wir versuchen es mit dem Ausdruck der Eigenzeit.

$$\rightarrow \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = MIN \quad (7.1)$$

Im Lagrangian sollte aber die Energie auftreten, was dazu führt, dass mit $m_0 c^2$ skaliert wird.

$$m_0 c^2 \int \sqrt{1 - v^2} dt = MIN \text{ oder } MAX ? \quad (7.2)$$

An dieser Stelle sind wir nicht sicher, ob wir mit diesem Lagrangian das Minimum oder das Maximum erhalten.

Wir untersuchen die Grenzen. Was passiert, wenn $v \ll c$ ist, resp. $\frac{v^2}{c^2} \rightarrow 0$?

Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
 m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &\xrightarrow{\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow 0} m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \text{Kleinigkeiten} \right) \\
 &\underbrace{\hspace{10em}} \\
 &= m_0 c^2 - \frac{1}{2} m_0 c^2 \frac{v^2}{c^2} + \dots \\
 &= m_0 c^2 - \frac{1}{2} m_0 v^2 \\
 &= \underline{V - T}
 \end{aligned}$$

In Kapitel 6.2, also in der klassischen Mechanik, war das Lagrangian $L = T - V$.
Unser relativistisches Lagrangian muss also mit einem MINUS korrigiert werden.

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \text{MIN} \tag{7.3}$$

Wir führen erneut die Taylorentwicklung durch.

$$\begin{aligned}
 -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} &\xrightarrow{\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow 0} -m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \text{Kleinigkeiten} \right) \\
 &\underbrace{\hspace{10em}} \\
 &= \frac{1}{2} m v^2 - m_0 c^2 = \underline{T - V}
 \end{aligned}$$

Das Minus ist also korrekt.

V ist aber nach Taylorentwicklung $m_0 c^2$. Wir wollen aber $V(x)$. Das Lagrangian muss also noch so korrigiert werden, dass in der Taylorentwicklung auch $V(x)$ auftritt.

$$\text{Also: } L \xrightarrow{\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \rightarrow 0} -m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + V(x) \right)$$

Für unser Lagrangian bedeutet das:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + 2 \cdot V(x) \tag{7.4}$$

Diese Art von Lagrangian betrachtet man in der allgemeinen Relativitätstheorie.

8. Kette

8.1 Vergleich mit Parabel

In diesem Experiment habe ich versucht, zu einer Kette eine möglichst genaue Parabel zu finden.

Es ist hier anzumerken, dass dieses Experiment nicht von höchster Genauigkeit besteht. Doch es ist genug genau, um das Wesentliche zu sehen.

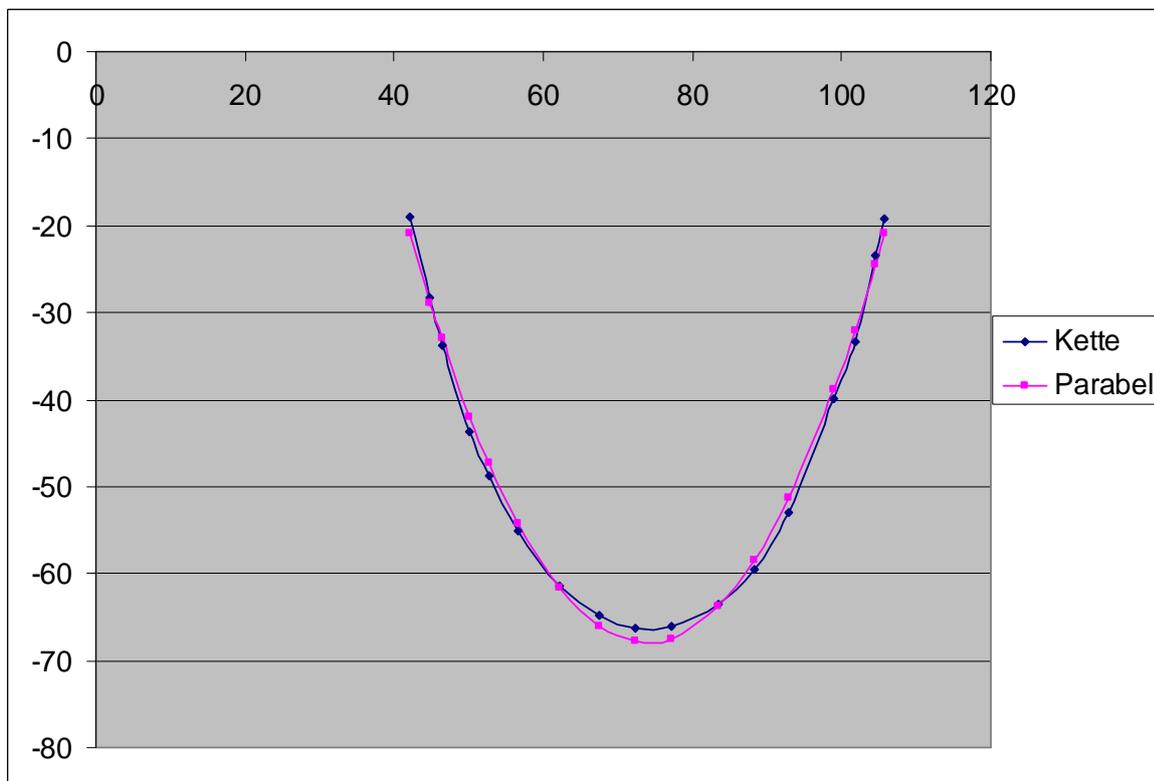


Abb.8. Vergleich Kette/ Parabel.

Diese Parabel wurde mit einer quadratischen Regression berechnet und gilt als die best angepasste Parabel für diese Kette.

Es ist also deutlich zu erkennen, dass diese Kette keine Parabel ist.

Um die Abweichungen genauer zu sehen, wurden beide Kurven in den Ursprung transformiert.

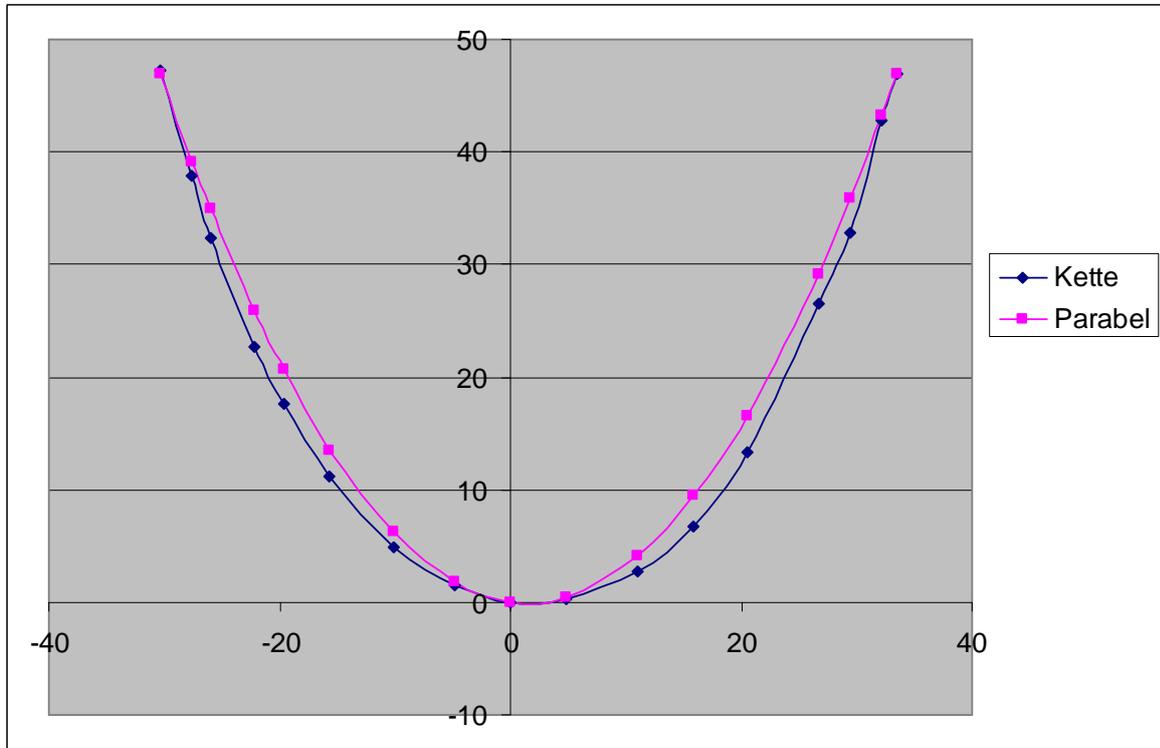


Abb.9. Vergleich Kette/ Parabel transformiert in Ursprung.

8.2 Vergleich mit Kettenkurve

Wenn die Kette sich nicht wie eine Parabel anordnet, stellt sich die Frage, was für eine Kurve sie dann beschreibt.

Theoretisch gesehen sollte das eine Kettenkurve, oder auch Katenoide genannt, sein.

Das Lagrangian für eine Kette lautet: $L = z \cdot \sqrt{1 + z'^2}$

Und die Euler- Lagrange Gleichung ergibt [3]:

$$y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + y_0$$

a ist eine Konstante, x_0 die Verschiebung in x- Richtung, y_0 die Verschiebung in y- Richtung.

Unsere Kette wird nun mit einer Kettenkurve verglichen.

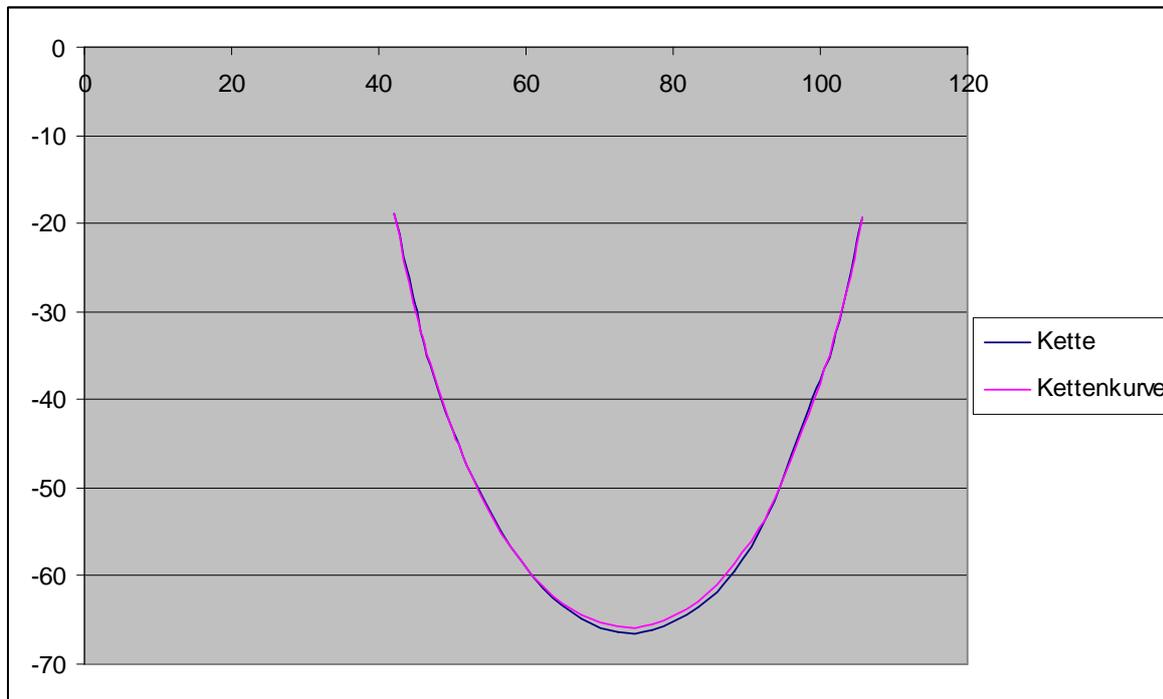


Abb.10. Vergleich Kette/ Kettenkurve.

Die Kurven sind fast deckungsgleich. Natürlich gibt es kleine Abweichungen, die aufgrund von ungenauen Messungen oder auch von der Kette selbst entstanden sind.

Doch dass diese Abweichungen viel kleiner sind als bei der Parabel, wird auf dieser Graphik deutlich. Es wurden hier die Differenzen einzelner Punkte auf der Kette und der der Parabel, bzw. Kettenkurve berechnet.

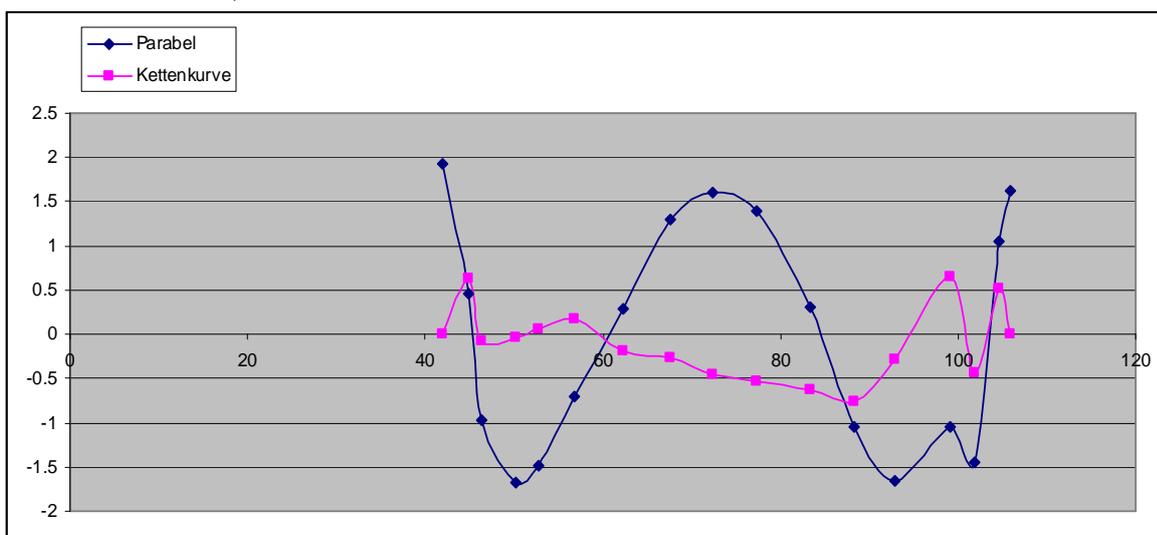


Abb.11. Vergleich der Differenzen von einzelnen Punkten auf der Kette und denjenigen auf der Parabel, bzw. Kettenkurve.

9. Seifenblasen

9.1 Kugel

Seifenblasen nehmen die Form einer Kugel an. Und das aus einem bestimmten Grund, denn die Kugel hat eine spezielle Eigenschaft. Wenn ein gegebenes Volumen von einer Kugel eingeschlossen wird, dann ist diese Fläche minimal. Jede andere Umschliessung dieses Volumens, zum Beispiel durch einen Quader, ergäbe eine grössere Fläche. Die Kugel ist also eine so genannte Minimalfläche. Durch diesen minimalen Flächeninhalt ist die potentielle Energie auch minimal. Und wie schon bei Kapitel 6.1 erwähnt, versucht die Natur die Energie, welche für ihren „Aufwand“ steht, zu minimieren.



Abb.12. Seifenblase als Kugelform 1



Abb.13. Seifenblase als Kugelform 2

9.2 Katenoid

9.2.1 Experimentell

Katenoide entstehen zwischen zwei parallelen Kreisringen, wobei diese gleicher oder verschiedener Grösse sein können.

Kreisringe gleicher Grösse



Abb.14. Katenoid mit Kreisringen gleicher Grösse 1



Abb.15. Katenoid mit Kreisringen gleicher Grösse 2

Kreisringe verschiedener Grösse



Abb.16. Katenoid mit Kreisringen verschiedener Grösse 1



Abb.17. Katenoid mit Kreisringen verschiedener Grösse 2



Abb.18. Katenoid mit Kreisringen verschiedener Grösse 3

9.2.2 Theoretisch

Es stellt sich nun die Frage, weshalb die Natur solche Gebilde wie Katenoide produziert.

Wir wissen, dass die Natur einen möglichst kleinen Aufwand will, d.h. sie will dass die Objekte ein Minimum an potentieller Energie haben. Das führt dazu, dass die Fläche dieser Objekte auch minimal sein sollte, was uns schon von der Kugel bekannt ist.

Wir wählen ein geeignetes Bezugssystem für den Katenoiden:

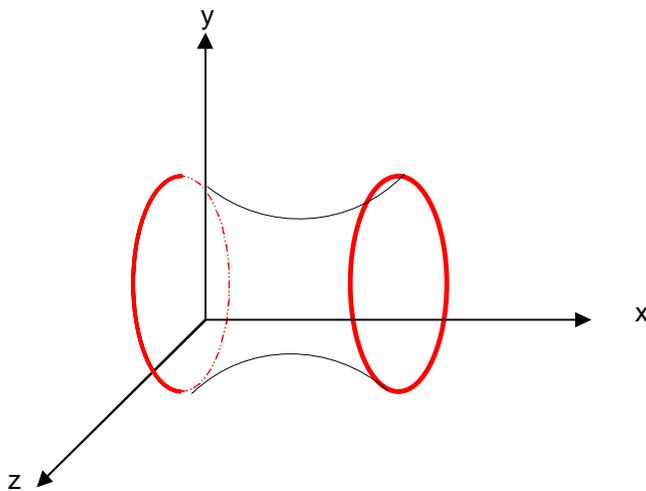


Abb.19. Darstellung eines Katenoids in einem geeigneten Bezugssystem.

Die Oberfläche dieses Katenoids setzt sich wie folgt zusammen:

$$A = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2} dx = MIN \quad (9.1)$$

Das Lagrangian ist gefunden. Es lautet: $y\sqrt{1 + y'^2}$, wobei hier das Gravitationsfeld vernachlässigt wurde. (9.2)

Die Euler-Lagrange Gleichung gibt uns $\sqrt{x^2 + y^2} = c \cosh \frac{z}{c}$ als Gleichung (9.3)
für einen Katenoiden. [4]

Das Lagrangian des Katenoids ist identisch mit dem der Kettenkurve.

Daraus lässt sich schliessen, dass wenn man eine Kettenkurve um die x-Achse rotiert, man eine Minimalfläche im dreidimensionalen Raum erhält, einen Katenoiden.

Katenoide sind zusätzlich die einzigen Minimalflächen, die gleichzeitig auch Rotationsflächen sind.

9.3 Experiment: Fläche in einem Kreisring

Beschreibung: Wir spannen eine Fläche aus Seifenblasenlösung in einen Kreisring ein. Es wird ein Faden, der an beiden Enden verknüpft ist und eine beliebige Form hat, auf die Lösung gelegt. Mit einer Nadel zersto- chen wir den Inhalt dieser durch den Faden aufgespannten Fläche.



Abb.20. Faden mit beliebiger Form.



Abb.21. nach Nadelstich: Faden mit runder Form.

Es lässt sich beobachten, dass sich die beliebige Form des Fadens in eine runde Form verändert.

Erklärung: Die Fläche aus Seifenblasenlösung in diesem Kreisring sollte immer minimal sein. D.h. die weisse Fläche, die vom Faden eingeschlossen wird, sollte maximal sein, um die blaue Fläche zu minimieren. Die weisse Fläche wird maximal, wenn der Faden zu einem Kreis wird.

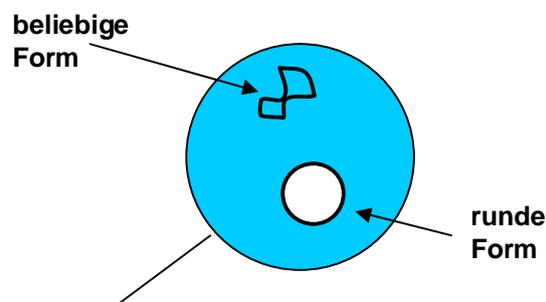


Abb.22. Darstellung des Experiments

10. Reflexionen

Mein Hauptziel, diesen Euler- Lagrange Formalismus zu verstehen, glaube ich erreicht zu haben. Auch die einfachen Experimente mit der Kette und den Seifenblasen konnten ohne grössere Probleme durchgeführt werden, was natürlich nicht heisst, dass sie nicht verbesserungswürdig sind.

Mit meiner geleisteten Arbeit bin ich durchaus zufrieden. Ich habe sehr viel Zeit investiert und dadurch sehr viel davon profitiert. Mein mathematisches Wissen ist um ein grosses Stück gewachsen, wovon ich auch noch später im Studium profitieren kann.

Für mich ist dieses Thema noch lange nicht abgeschlossen. Ich werde mich vermutlich noch mein ganzes Leben mit solchen interessanten Problemen befassen.

11. Bibliographie

- [1]. F.W. Byron, R.W. Fuller, Mathematics of classical and quantum physics, 1969-1970, Vol. 1, Addison- Wesley, 43-84
- [2]. R. P. Feynman, Vorlesungen über Physik, Band I, 2001, Oldenbourg, 352-365
- [3]. <http://de.wikipedia.org/wiki/Kettenkurve>
- [4]. <http://de.wikipedia.org/wiki/minimalfläche>

Hier muss jedoch angemerkt werden, dass ein Teil der benötigten Informationen nicht aus Büchern stammt, sondern aus Diskussionen entstanden sind, die ich mit Herrn Jerzy Sromicki geführt habe.

Dieses Thema setzt die Kenntnis über Differenzialgleichungen voraus. Ich empfehle folgendes Buch:

- [5]. L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 2004, Vieweg, 433- 499, 607- 620, 744- 769

Es verfügt über zahlreiche Beispiele, die mir persönlich sehr geholfen haben.

Wenn sich jemand für das brachistochrone Problem speziell interessiert, dem empfehle ich folgende Ausschnitte aus folgender Zeitschrift:

- [6]. L. Haws, T.Kiser, Exploring the Brachistochrone Problem, Amer. Math. Monthly 102 (4) (1995) 328-336
- [7]. G. Lawlor, A New Minimization Proof for the Brachistochrone, Amer. Math. Monthly 103 (3) (1996) 242-249

12. Dank

Ich möchte mich ganz besonders bei Herrn Dr. Jerzy Sromicki bedanken. Sein zeitlicher Aufwand, sowie sein Interesse waren enorm. Er hat sich auch immer für mich Zeit genommen und das alles erscheint mir nicht als selbstverständlich. Weiter bedanke ich mich bei meinem Mathematiklehrer Herrn Marcel Gühr für das Mathematikbuch über Differenzialgleichungen. Auch Meinrad Sidler möchte ich speziell für die Hilfe am Computer danken. Einen grossen Dank verdient auch Benjamin Koch für das Fotografieren der Seifenblasen.

13. Deklaration

„Ich erkläre hiermit,

- dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst habe,
- dass ich auf eine eventuelle Mithilfe Dritter in der Arbeit ausdrücklich hinweise,
- dass ich vorgängig die Schulleitung und die betreuende Lehrperson informiere, wenn ich diese Maturaarbeit, bzw. Teile oder Zusammenfassungen davon veröffentlichen werde, oder Kopien dieser Arbeit zur weiteren Verbreitung an Dritte aushändigen werde.“

Ort: Dagmersellen
Datum: 6. Oktober 2006

Unterschrift: