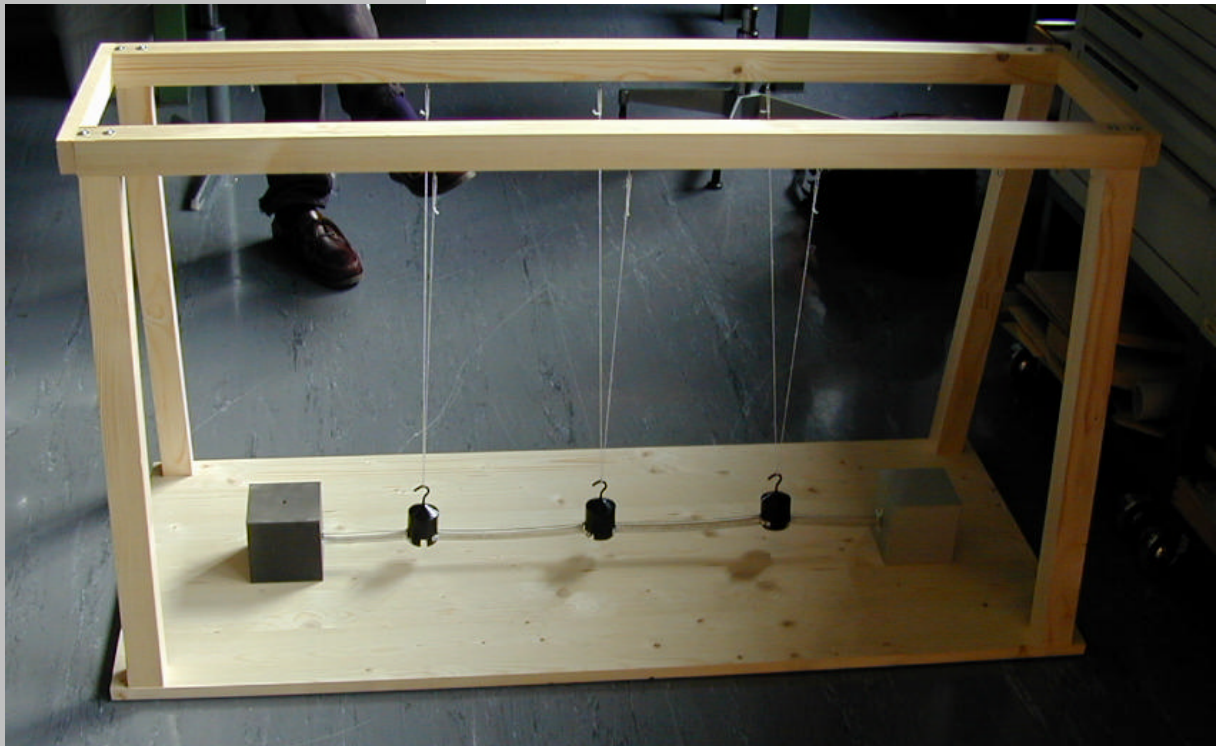


Maturaarbeit 2002
im Fach Physik

Gekoppelte harmonische Schwingungen der Pendelsysteme



Autor:
Sarah Hellmüller, 6c
Waldegg 10
6210 Sursee

Betreuer:
J. Sromicki
Kirchstr. 9
8107 Buchs

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Rechnen mit Matrizen	3
2.1	Die Determinante D	3
2.2	(3,3)-Matrizen	3
2.3	Addition von Matrizen	3
2.4	Multiplikation von Matrizen	3
3	Herleitung des Weg-Zeit-Gesetzes der harmonischen Schwingung	4
4	Zwei-Pendel-Systeme	4
5	Drei-Wagen-Systeme	5
5.1	Eigengleichung	6
5.2	Eigenwerte	6
5.3	Eigenvektoren	6
5.4	Bewegungsgleichungen für Normalkoordinaten	7
5.5	Zusammenhänge	7
5.6	Normalkoordinaten	8
5.7	Versuche: Summe / Differenz	8
5.8	Allgemeine Lösung	8
5.9	Skizze	9
5.10	Einfluss der Gravitation bei demselben System	9
6	System mit vier Pendeln	10
7	Systeme mit drei Pendeln, die an der Seite auch mit Federn befestigt sind	11
8	Die eigene Konstruktion	12
8.1	Betrachtung von Magneten	12
8.2	Vorversuche	12
8.3	Die Hauptkonstruktion	13
8.4	Hauptversuche	13
9	Bedeutung von Schwingungen in der Molekularphysik	14
10	Reflexionen	14
11	Bibliographie	15
12	Danksagung	15
13	Deklaration	15
14	Anhang	15
14.1	Berechnung der inversen Matrix	15
14.2	System mit vier Pendeln	16
14.3	Tabellen zu den Vorversuchen	18
14.4	Bilder	18

1 Einleitung

Mit der genaueren Untersuchung der Welt gelangte man bereits sehr früh zur Erkenntnis, dass nicht nur die Glocke vom Kirchturm, sondern auch die Materie im mikroskopischen Bereich Schwingungen ausführt. Grund genug die Maturaarbeit diesem Thema zu widmen und harmonische Schwingungen exakt zu analysieren.

Ganz konkret sind im Verlaufe der Zeit die Vermutungen aufgetreten, dass es nur wenige Bewegungen gibt, bei welchen keine Energie von einem Pendel zum anderen gelangt und dass Atome im Molekül nur genau diese Art von Bewegungen ausführen können. Das heisst, sie befinden sich in vorgegebenen Energiezuständen und können diese durch Abgabe von Photonen (Lichtenergie) wechseln. Mit modernen Methoden lässt sich die Energie messen (nicht unbedingt im sichtbaren Bereich) und daraus leitet sich ab, dass die Atome tatsächlich wie vermutet schwingen.

Mit heutigen Methoden ist es nicht möglich einzelne Atome oder Moleküle direkt zu beobachten. Notwendigerweise muss man grössere Modelle als Annäherung benutzen. Deshalb sollen in dieser Arbeit die verschiedenen Aspekte von harmonischen Schwingungen an mehreren gekoppelten Pendeln untersucht werden. Einige Vorversuche geben erste Ideen vom Verhalten der Pendel. Die anschliessende mathematische Betrachtung (mit Hilfe der Matrizenrechnung) liefert die genauen Resultate und als Abschluss soll ein selbstgebautes System die Hypothesen bestätigen. Zusätzlich kann man diese Theorie auf einfache Moleküle anwenden und mit den Messresultaten vergleichen. Das Ziel meiner Arbeit ist es, die Gesetzmässigkeiten bei Schwingungen mathematisch berechnen zu können und ein selbst konstruiertes Modell zu bauen, um einerseits die ausgearbeitete Theorie zu bestätigen und andererseits den Mitschülern das Verständnis für Schwingungen zu erleichtern. Weiter sollen erste Erfahrungen für wissenschaftliche Arbeiten gesammelt werden.

Die Methoden, um dieses Problem theoretisch zu berechnen, erarbeitete ich zum einen Teil aus der Literatur (siehe Bibliographie), zum anderen Teil durch selbständiges Austüfteln unter der Leitung von Herrn J. Sromicki. Beim Bau des Systems halfen mir die Ratschläge von Herrn J. Sromicki und Fachangestellten in den Läden, aber ich kann mit gutem Gewissen feststellen, dass die Initiative bei der Durchführung dieser Arbeit eindeutig auf meiner Seite lag.

2 Rechnen mit Matrizen

(2,2) – Matrizen

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \right\} M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad x_1, x_2 \text{ Unbekannte}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = N^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \text{ und } N \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad N : 2 \times 2 \text{ Transformationsmatrix (q} \rightarrow \text{x)}$$

(Die Definition von N befindet sich Seite 7)

2.1 Die Determinante D

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{d_1}{D} \quad y = \frac{d_2}{D}$$

Die Determinante berechnet sich so:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = D$$

Vertauscht man bei einer Matrix die Zeilen mit den Spalten, so ändert die Determinante der Matrix ihren Wert nicht (Spiegelung).

2.2 (3,3)-Matrizen

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Um die Determinante zu berechnen, hat man zwei Möglichkeiten, entweder so wie oben dargestellt oder mit folgendem Prinzip:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$$

2.3 Addition von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

2.4 Multiplikation von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der Matrizen darf nicht vertauscht werden!

Ausnahme: Multiplikation mit der inversen Matrix

$$N \cdot N^{-1} = I^2 \quad N^{-1} \cdot N = I^2$$

3 Herleitung des Weg-Zeit-Gesetzes der harmonischen Schwingung

Grundbegriffe der Mechanik:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ momentane Geschwindigkeit}$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}(t)$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Zweites Newtonsches Gesetz: gilt für alle Bewegungen des Massenpunktes mit Masse m

$$a = \ddot{x} \quad F = ma \quad F = -kx$$

$$m \ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Eine harmonische Schwingung ist eine Bewegung unter dem Einfluss der Kraft F die zur Auslenkung x proportional ist. $F = -kx$ (Hooksche's Gesetz)
z.B. bei einer Feder ist k die Federkonstante.

$$x(t) = B \sin(\omega t + j)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega B \cos(\omega t + j)$$

$$\ddot{x}(t) = \underbrace{-\omega^2 B}_{A} \sin(\omega t + j)$$

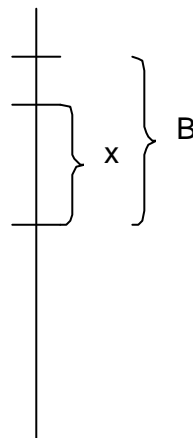
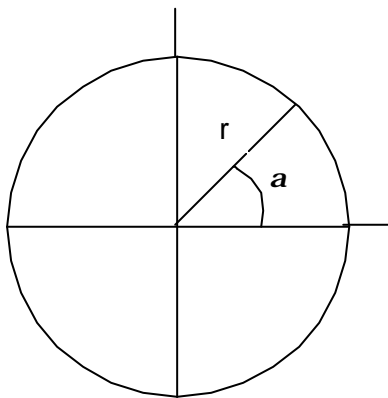
$$\underline{\underline{\ddot{x}(t) = A \sin(\omega t + j) \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

Ansätze für $x(t) = B \sin(\omega t + j)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a = \omega t + j$$

$$x = B \sin a$$



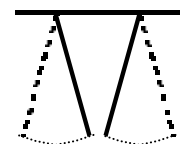
- r: Radius
- B: maximale Auslenkung
- j: Anfangsphase
- ωt : Phasenzuwachs zur Zeit t
(d.h. bei $t = T$ ist $\omega t = 2\pi$)
- k: Federkonstante

4 Zwei-Pendel-Systeme

Es ist das einfachste gekoppelte System. Die Berechnung erfolgt analog zu drei Pendeln (Ich habe aus Platzgründen die Herleitung nur für drei Pendel detailliert aufgeschrieben).

Resultate:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_0 t + j_1) + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\omega_0 t + j)}}$$



5 Drei-Wagen-Systeme

(Ähnlich 3 Pendel ohne Gravitation)

Diese und alle folgenden Berechnungen führte ich selbständig durch.

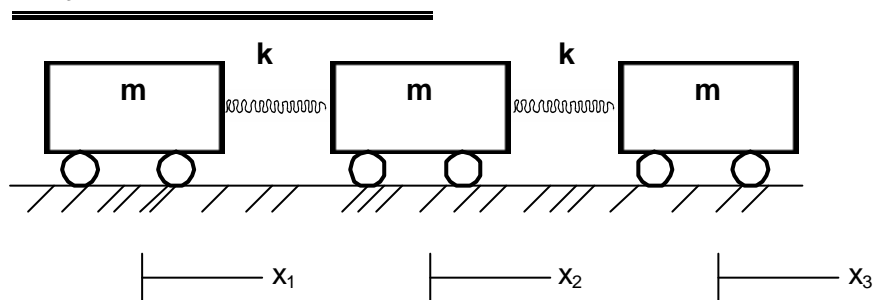
Für drei mit Federn gekoppelte Körper gibt es genau drei Bewegungen, bei denen keine Energieübertragungen zwischen den einzelnen Körpern stattfinden. Im Folgenden wird aufgezeigt, wie man zu den entsprechenden Bewegungsgleichungen kommt.

Die Körper mit Masse m , die durch drei Wagen symbolisiert werden, sind durch Federn der Federkonstante k verbunden. Die Auslenkungen von Wagen₁, Wagen₂ bzw. Wagen₃ sind x_1 , x_2 und x_3 . Wird Körper₂ weiter ausgelenkt als Körper₁ ($x_2 > x_1$), so wirkt die Federkraft auf Wagen₁ in die Richtung der x -Achse, sie ist also positiv; auf Wagen₂ gegen die Richtung der x -Achse, sie ist also negativ. Die Feder versucht ständig ihren Grundzustand (d.h. Zustand mit der kleinsten Energie) zu erreichen. Wenn sie ausgedehnt wird, so ziehen sich beide Enden Richtung Mittelpunkt zusammen. Wird sie komprimiert, so stösst die Feder vom Mittelpunkt her nach aussen.

$$m \ddot{x}_1 = k (x_2 - x_1)$$

$$m \ddot{x}_2 = -k (x_2 - x_1) + k (x_3 - x_2)$$

$$m \ddot{x}_3 = -k (x_3 - x_2)$$



Die Bewegungsgleichungen des Systems lassen sich in einer (3,3)-Matrixform darstellen. Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit ω_0 im Quadrat gleich der Federkonstante k dividiert durch die Masse m .

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Omega^2 = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Mathematisch stellt dieses Gleichungssystem das so genannte Eigen-Problem dar. Ich vermute, dass es eine Lösung gibt, bei welcher alle Wagen kohärent mit gleicher Frequenz,

aber vielleicht verschiedenen Amplituden schwingen. Mit dem Ansatz $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \sin(\omega t + j)$

ersetzt man das Problem von Differentialgleichungen durch ein System von algebraischen, linearen Gleichungssystemen (Die Rechnungen sind analog denjenigen auf Seite 4)

Subtrahiert man von der Frequenz-Matrix Ω^2 die Einheitsmatrix I^2 multipliziert mit ω^2 und multipliziert anschliessend die Differenz mit dem Eigenvektor, so erhält man:

$$\left(\Omega^2 - \omega^2 \cdot I^2 \right) \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ wobei die Eigenfrequenz und der Eigenvektor } (N_1, N_2, N_3) \text{ gesucht}$$

sind.

$$\mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{I}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{w}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}^2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{gegeben: } \mathbf{w}_0^2 = \frac{k}{m} \\ \text{gesucht: } \mathbf{w}^2 \end{array}$$

Um das Problem zu vereinfachen, klammert man $-\mathbf{w}_0^2$ aus. Damit das obige Gleichungssystem stimmt, muss entweder $\det(\Omega^2 - \mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{I}^2) = 0$ sein oder $N_1 = N_2 = N_3 = 0$. Wäre das letztere gültig, so bedeutet das, dass die Körper überhaupt keine Bewegungen ausführen und deren Zustand somit uninteressant ist. D.h. wir wählen \mathbf{w}^2 so, dass die sog. Eigengleichung gilt: $\det(\Omega^2 - \mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{I}^2) = 0$ (det siehe Rechnen mit Matrizen Seite 3).

5.1 Eigengleichung

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{w}^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \mathbf{w}^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \mathbf{w}^2 \end{pmatrix} = 0$$

Nun lösen wir die Eigengleichung und erhalten dabei die Resultate $\mathbf{w}^2 = 0$, $\mathbf{w}^2 = 1$ und $\mathbf{w}^2 = 3$. Diese Werte werden in die Gleichung eingesetzt, welche anschliessend gelöst wird. Wir kennen jetzt die drei Eigenvektoren, bei denen die Pendel Bewegungen ausführen ohne Energie zu übertragen.

$$(1 - \mathbf{w}^2)^2 (2 - \mathbf{w}^2) + 0 + 0 - 0 - (1 - \mathbf{w}^2) - (1 - \mathbf{w}^2) = 0$$

$$(1 - \mathbf{w}^2) [(1 - \mathbf{w}^2) (2 - \mathbf{w}^2) - 2] = 0$$

$$(1 - \mathbf{w}^2) [2 - \mathbf{w}^2 - 2\mathbf{w}^2 + \mathbf{w}^4 - 2] = 0$$

$$(1 - \mathbf{w}^2) \omega^2 (-3 + \mathbf{w}^2) = 0 \quad (\text{Eigengleichung in der Produktform})$$

5.2 Eigenwerte

$$\mathbf{w}^2 = 0$$

$$\mathbf{w}^2 = 1$$

$$\mathbf{w}^2 = 3$$

5.3 Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{l} N_1 - N_2 = 0 \\ -N_1 - 2N_2 - N_3 = 0 \\ -N_2 + N_3 = 0 \\ N_1 = N_2 = N_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{l} -1 N_2 = 0 \\ N_2 = 0 \\ -N_1 + N_2 - N_3 = 0 \\ -N_1 = N_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{l} -2N_1 - N_2 = 0 \\ -N_1 - 2N_2 - N_3 = 0 \\ -N_2 - 2N_3 = 0 \\ N_1 = N_3 = -2N_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus diesen drei Vektoren wird die Matrix N (Transformationsmatrix von Normalkoordinaten q in „Raumkoordinaten“ „ x “) zusammengesetzt. Im Anhang findet man auch noch die Herleitung der inversen Matrix N^{-1} .

Durch die Multiplikation von Ω^2 mit den Matrizen N und N^{-1} erhalten wir die Bewegungsgleichungen für Normalkoordinaten.

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = N^{-1} \Omega^2 N \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der Multiplikationen spielt dabei keine Rolle, weil die Matrixmultiplikationen assoziativ sind.

Als erstes wird Ω^2 mit N multipliziert (siehe Rechnen mit Matrizen Seite 3) dann das Produkt mit N^{-1} .

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = -w_0^2 \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{(Frequenzmatrix in diagonaler Form)}}$$

5.4 Bewegungsgleichungen für Normalkoordinaten

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

5.5 Zusammenhänge

Hier sind die Zusammenhänge von $q_{1,2,3}$ und $x_{1,2,3}$ dargestellt (siehe Rechnen mit Matrizen Seite 3).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_N \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}}_{N^{-1}}$$

5.6 Normalkoordinaten

N als ein System mit drei Gleichungen dargestellt.

$$q_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$q_2(t) = x_1(t) - x_3(t)$$

$$q_3(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t)$$

5.7 Versuche: Summe / Differenz

Versuche mit Summe und Differenz der zweiten Ableitungen von $x_{1,2,3}$ ergeben folgende Gleichungen, mit denen man wieder zurück zu den Bewegungsgleichungen für Normalkoordinaten gelangt.

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = -w_0^2 \cdot 0(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 = -w_0^2(x_1 - x_3)$$

$$\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_2 + \ddot{x}_3 = -3w_0^2 \cdot 0(x_1 - 2x_2 + x_3)$$

5.8 Allgemeine Lösung

\ddot{q}_1, \ddot{q}_2 und \ddot{q}_3 sind drei unabhängige harmonische Oszillatoren und führen daher je eine Normalschwingung durch. Eine Normalschwingung ist ein Bewegungszustand, bei dem nur eine Normalkoordinate (q_1, q_2, q_3) verschieden von Null ist. Dem entsprechend sind die drei Gleichungen entkoppelt. Eine logische Folge ist die diagonale Matrix (siehe oben).

$$q_1 = A \cdot \cos(\omega t + j_1)$$

$$q_2 = B \cdot \cos(\omega_0 t + j_2)$$

$$q_3 = C \cdot \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + j_3)$$

Die Variablen q_1, q_2 und q_3 stellen je eine Schwingung dar. A, B und C sind die maximalen Auslenkungen. $0t, \omega_0 t$ und $\sqrt{3}\omega_0 t$ sind die momentanen Auslenkungen, j_1, j_2 und j_3 sind die Anfangsphasen.

Nun kann man q_1, q_2 und q_3 in die obigen Gleichungen für x_1, x_2 und x_3 einsetzen.

$$x_1 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot A \cos(\omega t + j_1) + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot B \cos(\omega_0 t + j_2) + \frac{1}{6} \cdot C \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + j_3)$$

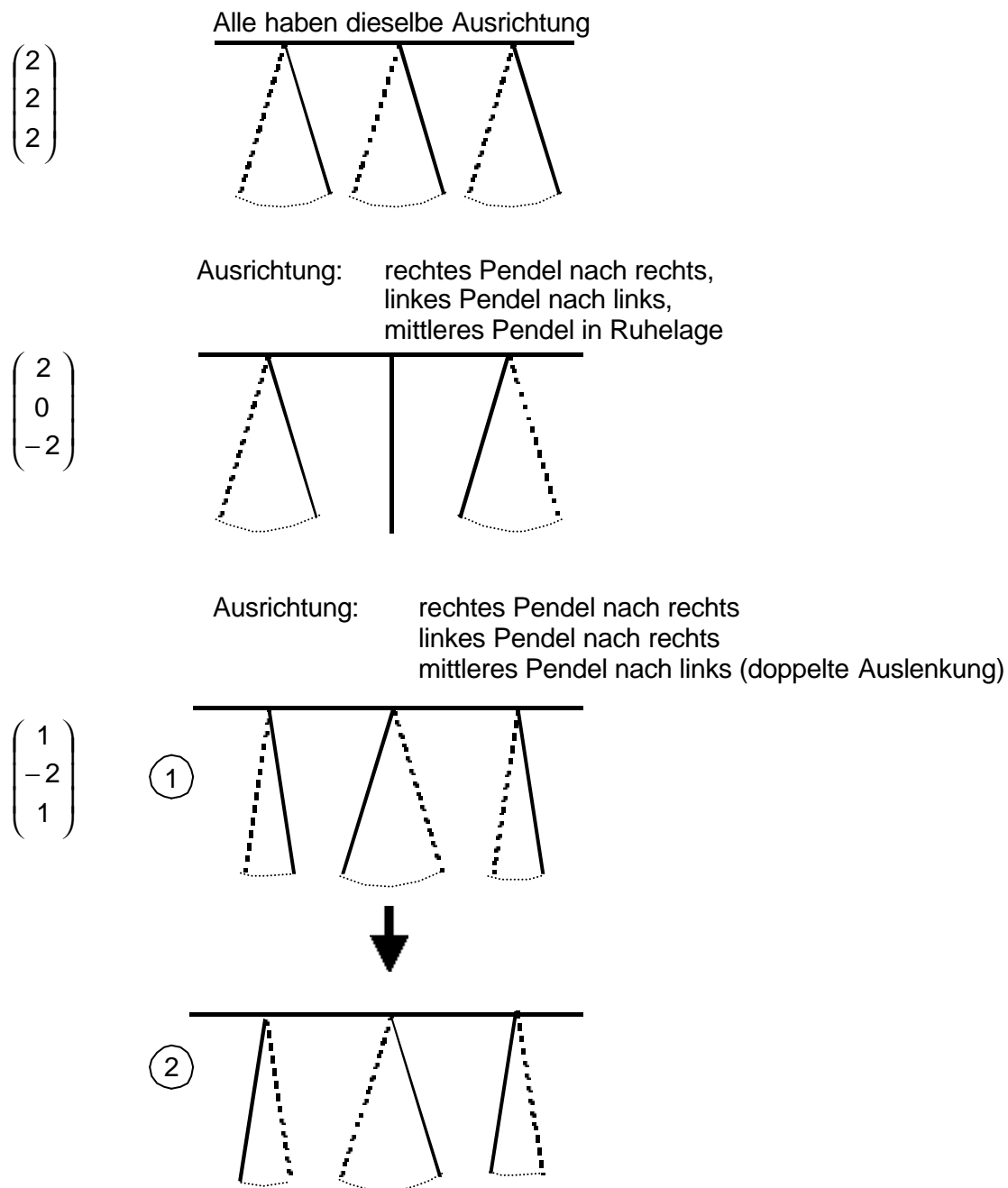
$$x_2 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot A \cos(\omega t + j_1) + \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot B \cos(\omega_0 t + j_2) + \frac{1}{6} \cdot (-2) \cdot C \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + j_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot A \cos(\omega t + j_1) + \frac{1}{6} \cdot (-3) \cdot B \cos(\omega_0 t + j_2) + \frac{1}{6} \cdot C \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + j_3)$$

$$\text{oder } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(\omega t + j_1) + \frac{1}{6} B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cos(\omega_0 t + j_2) + \frac{1}{6} C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + j_3)$$

5.9 Skizze

Die Skizzen sollen die theoretisch ausgerechneten Bewegungen einsichtlich aufzeigen. Es gibt drei mögliche Anfangsstellungen. x_1 ist die Auslenkung von Pendel 1, x_2 von Pendel 2 und x_3 jene von Pendel 3.



5.10 Einfluss der Gravitation bei demselben System

Auf ein System mit drei Pendeln wirken in der Realität aber noch weitere Kräfte neben der Federkraft: Die Reibungs- und die Gravitationskraft. Die Reibung vernachlässigen wir hier, weil es die Berechnung nur unnötig erschweren würde und weil die kleine Reibung am eigentlichen Ergebnis nicht viel ändert, ausser dass nach einiger Zeit das System zum Stillstand kommt. Der Einfluss der Gravitation wird im Folgenden ausgerechnet. Das Minuszeichen kommt aus der Bedingung, dass wenn die Auslenkung x positiv ist, die Gravitation gegen die Richtung der x -Achse wirkt und somit negativ sein muss.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - \frac{mg}{l}x_1 \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) - \frac{mg}{l}x_2 \\ m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) - \frac{mg}{l}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_g^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 + \omega_g^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 + \omega_g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Weil die Gravitation nur die diagonalen Matrixelemente beeinflusst, kann die neue Matrix als eine Addition von zwei Matrizen angesehen werden. Deshalb ist es möglich $\omega^2 - \omega_g^2$ durch I zu ersetzen.

$$\det \begin{vmatrix} \omega_0^2 + \omega_g^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 + \omega_g^2 - \omega^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 + \omega_g^2 - \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\omega^2 - \omega_g^2 = I$$

$$\det \begin{vmatrix} \omega_0^2 - I & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 - I & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \omega_0^2 - I \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\omega_0^2 - I)^2 (2\omega_0^2 - I) - 2\omega_0^4 (\omega_0^2 - I) \\ &= (\omega_0^2 - I) [(\omega_0^2 - I)(2\omega_0^2 - I) - 2\omega_0^4] \\ &= (\omega_0^2 - I) (2\omega_0^4 - 3\omega_0^2 I + I^2 - 2\omega_0^4) \\ &= (\omega_0^2 - I) I (3\omega_0^2 - I) = 0 \end{aligned}$$

$$I = 0 \qquad I = \omega_0^2 \qquad I = 3\omega_0^2$$

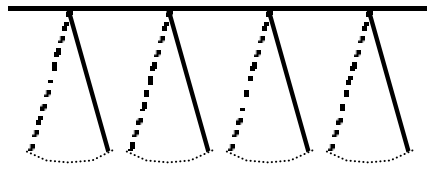
$$\underline{\underline{\omega_1^2 = \omega_g^2}} \qquad \underline{\underline{\omega_2^2 = \omega_0^2 + \omega_g^2}} \qquad \underline{\underline{\omega_3^2 = 3\omega_0^2 + \omega_g^2}}$$

6 System mit vier Pendeln

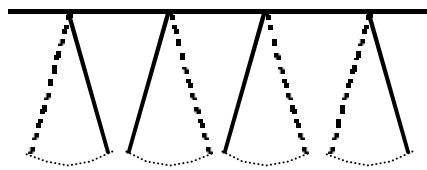
Der Aufbau des Systems mit vier Pendeln ist ähnlich dem mit drei Pendeln. Die Anzahl gekoppelt schwingender Körper ist gleich der Anzahl möglicher Bewegungen, bei denen keine Energie übertragen wird. D.h. bei vier Pendeln gibt es vier solche Schwingungsmuster. Die Herleitung der Gleichungen ist analog der von drei Pendeln.

Wir erhalten wie erwartet vier Eigenwerte von Ω^2 und entsprechend auch vier Eigenvektoren (Die Berechnungen sind im Anhang zu finden).

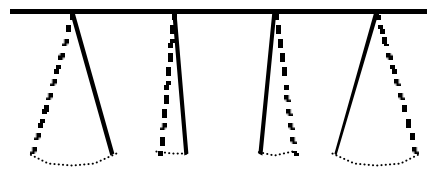
$$w_1^2 = w_g^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



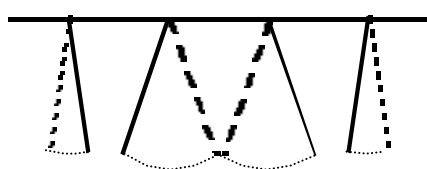
$$w_2^2 = 2w_0^2 + w_g^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$w_3^2 = w_0^2(2 - \sqrt{2}) + w_g^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

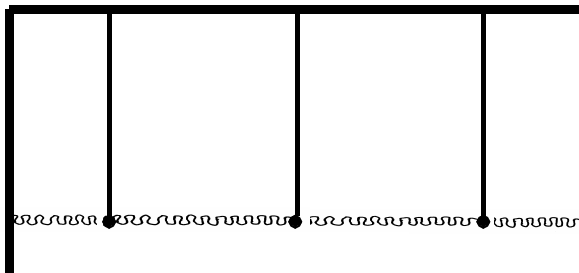


$$w_4^2 = w_0^2(2 + \sqrt{2}) + w_g^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$



Berechnungen für fünf und mehr Pendel erfolgt ebenfalls nach demselben Prinzip. Ich verzichte hier auf eine weitere Behandlung dieser Systeme.

7 Systeme mit drei Pendeln, die an der Seite auch mit Federn befestigt sind



Grundsätzlich kann man auch hier mit dem genau gleichen Prinzip arbeiten wie bisher. Zu beachten sind zusätzlich jene Kräfte, die durch die zwei neuen Federn auf die beiden „äußeren“ Pendel wirken. Die Federkonstanten der „äußeren“ beiden Federn entsprechen $2k$, die der „inneren“ k . Der grosse Vorteil dieses Systems ist allerdings, dass die Federn sich nicht im Grundzustand befinden müssen. Da alle die gleiche Kraft ausüben, entsteht ein Gleichgewicht. Das bringt wesentliche Vorteile bei der Konstruktion von mechanischen Systemen, welche die in dieser Arbeit entwickelte Theorie demonstrieren wird.

$$m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k(x_2 - x_1) - \frac{mg}{l}x_1$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) - \frac{mg}{l}x_2$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) - 2kx_3 - \frac{mg}{l}x_3$$

Wir erhalten folgende Eigenwerte und die Eigenvektoren:

$$\mathbf{w}_1^2 = \mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_g^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2^2 = 3\mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_g^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3^2 = 4\mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_g^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8 Die eigene Konstruktion

8.1 Betrachtung von Magneten

Um überhaupt eine Idee von den harmonischen Schwingungen zu erhalten, führte ich zuerst einige Vorversuche durch.

Versuchsaufbau: Ich habe Gewichte (Magnete) an einem Metallband befestigt. Die Magnete sollten die Aufgabe der Federn erfüllen.

Beobachtung: Die Frequenz war ziemlich hoch. Die Metallbänder mussten sehr gut befestigt werden, sonst war die bremsende Kraft zu gross und das Pendel blieb nach kurzer Zeit stehen.

Fazit: Beim Endexperiment werde ich Fäden und Federn verwenden. Ich habe bei den Magneten keine Gewissheit, ob sie sich gleich verhalten wie die Federn. Die kritische Frage ist, ob die Kraft zwischen zwei Magneten zur Auslenkung unterschiedlich proportional ist. Die Frequenzen bei Fadenpendeln sind optimaler.

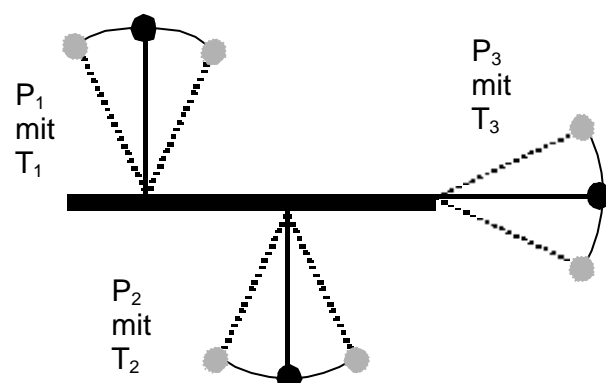
8.2 Vorversuche

Ich habe zwar viele Versuche gemacht, allerdings sind die Resultate nicht allzu genau! Ich liste deshalb hier als Beispiel nur einen auf.

- Versuch:** Ich baute das System dreimal auf. Als erstes befand sich das Pendel (P_1) in aufrechter Lage. Das heisst die Gravitationskraft wirkt entgegen der Federkraft. (Tab. 1 im Anhang) Pendel P_2 ist auf dem Kopf (Tab. 1), die Gravitationskraft wirkt mit der Federkraft und Pendel P_3 liegt waagrecht im Raum (Tab. 1).

$T_{1,2,3}$ ist die Dauer für 19 Schwingungen.

Auf den genauen Zusammenhang der Zeiten T_1 , T_2 und T_3 verzichte ich hier aus Platzgründen.



8.3 Die Hauptkonstruktion

(siehe Abb. auf Titelseite)

Nachdem ich gewisse Nachteile des Magnetsystems feststellte, habe ich meine Aufmerksamkeit wieder auf ein mechanisches Pendelsystem gerichtet.

Versuchsaufbau

Feder:	131 Windungen (lange), 65,5 Windungen (kurze) Länge: 94mm (lange), 47mm (kurze) Durchmesser: 15mm Durchmesser des Federdrahtes: 0,72mm Federkonstante (selbst gemessen): $k = 3.12 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right)$
Fäden:	Hanfschnur (aus der Haushaltsabteilung) Länge: je 130mm
Gewichte:	je 500g
Holzkonstruktion:	Bodenbrett 129cm x 54.5cm x 1.8cm (Fichte) Hölzer für Querverbindungen: Breite: 2cm x 4cm Länge: je 34.5cm Hölzer für Gestell: Breite: 4.5cm x 4.5cm Länge: 2 x 125cm 4 x 67cm (angewinkelt)
Schrauben:	Holzrundsrauben 3.5 x 80mm Holzschrauben Rundkopf verzinkt 4,0 x 50 mm Hakenholzsrauben verzinkt 2.5 x 30mm

Die verschiedenen Komponenten wurden so gewählt, weil das System einerseits übersichtlich bleiben soll andererseits aber nicht zu klein sein darf, um Messfehler einzuschränken. Weiter sollen die beiden Winkelgeschwindigkeiten (w_0 und w_g) ungefähr gleich sein. So gelingt es ein System zu bauen, in dem die Wirkung der Federn gut beobachtet werden kann.

$$w_0 \approx w_g \quad \sqrt{\frac{k}{m}} \approx \sqrt{\frac{g}{l}} \quad : \quad \sqrt{\frac{3.12 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]}{0.5[\text{kg}]}} = 2.5 \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \approx \sqrt{\frac{9.8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]}{0.65[\text{m}]}} = 3.9 \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$$

8.4 Hauptversuche

Zuerst testete ich, ob die Resultate mit zwei Pendeln stimmen. Das Ergebnis war sehr zufriedenstellend. Anschliessend erweiterte ich das System für drei Pendel und versuchte die Eigenschwingungen zu finden (Die Variante mit den zwei Seitenfedern hatte ich zu diesem Zeitpunkt noch nicht ausgerechnet).

Hypothesen: Ich stellte Vermutungen auf, wie die Bewegungsabläufe theoretisch sein müssten. Die nachträglichen Berechnungen lieferten mir dann auch die Bestätigung.

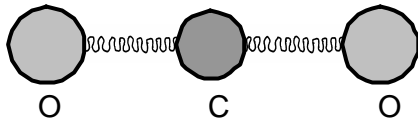
Das System bietet auch die Möglichkeit mit vier oder fünf Pendeln zu arbeiten, dafür müsste ich allerdings noch einige Zusätze konstruieren (z.B. Leiste für die Anfangsauslenkung).

Auswertung: Das System ist robust gebaut. Bewegungen lassen sich leicht nachvollziehen. Es hat eine geeignete Grösse um Experimente Drittpersonen vorzustellen. Der Transport ist jedoch etwas mühsam. Es ist möglich eine Reihe von verschiedenen interessanten Versuchen durchzuführen und das System weiter auszubauen in Richtungen, die ausserhalb dieser Arbeit liegen.

9 Bedeutung von Schwingungen in der Molekularphysik

Die Atome in den Molekülen verhalten sich wie gekoppelte Körper. Der Unterschied ist, dass sie nur Bewegungen ausführen können, bei denen keine Energie übertragen wird. Sie befinden sich in verschiedenen Energiezuständen und springen von einem Zustand zum anderen unter Abgabe von Photonen. Die Schwingung, bei der alle Atome dieselbe „Auslenkung“ haben, entspricht der Fortbewegung des Moleküls; es gibt also immer eine Bewegung weniger pro System als bei gekoppelten Pendeln unter der Wirkung der Gravitationskraft. Als Beispiel betrachte ich das CO₂ Molekül.

Die Abgabe von Photonen bei CO₂ lässt sich im Infraroten Bereich messen. CO₂ entspricht einem System mit drei Pendeln, weil die Atome in einem Winkel von 180° angeordnet sind.



Die gemessenen Eigenfrequenzen für CO₂ betragen 1337/cm und 2349/cm. Sie sind gemessen in $\frac{1}{l}$.

$$\begin{array}{l} \text{Gemessen:} \quad w_2 \sim 1337 \quad \frac{w_3}{w_2} = 1.757 \\ \quad \quad \quad w_3 \sim 2349 \end{array}$$

$$\text{Berechnet:} \quad (\text{ohne Gravitation}) \quad w_2^2 = 1 \quad \text{und} \quad w_3^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{w_3}{w_2} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = 1.732$$

Wir erkennen, dass das Verhältnis der gemessenen bzw. der berechneten Werte sehr gut übereinstimmt. Die geringen Abweichungen lassen sich möglicherweise auf den Unterschied zwischen der Masse von Kohlenstoff und Sauerstoff zurückführen oder auf die Vermutung, dass sich die potentielle Energie nicht gleich verhält wie die Energie der Pendel.

Die Photonenwellenlängen:

$$l_2 = \frac{1}{1337} (\text{cm}) = 7.48 \cdot 10^{-6} (\text{m}) = 7.48 (\text{nm})$$

$$l_3 = \frac{1}{2349} (\text{cm}) = 4.32 \cdot 10^{-6} (\text{m}) = 4.32 (\text{nm})$$

Der sichtbare Bereich liegt zwischen 0,4 (nm) und 0,8 (nm). Das CO₂-Photonenspektrum liegt also knapp nicht mehr im sichtbaren Bereich. Man kann aber die Photonenenergie messen und so herausfinden in welchem Zustand sich die Moleküle befinden.

10 Reflexionen

Ich habe meine gesetzten Ziele erreicht. Sowohl die theoretische Herleitung als auch der praktische Teil, der Aufbau eines Systems zum Test der Theorie, ist mir gelungen. Man muss dazu allerdings anmerken, dass dieser Themenbereich noch lange nicht abgeschlossen ist und dass sich noch unzählige Möglichkeiten ergeben würden daran weiter zu arbeiten. Noch nicht ganz abgeschlossen ist der Ausbau des Systems, welches anschliessend durch die Schule weiterverwendet wird.

Ich bin zufrieden mit meiner geleisteten Arbeit. Persönlich habe ich sehr viel davon profitiert und mir zusätzliches mathematisches Wissen angeeignet. Durch die intensive Bearbeitung des Themas verbesserte ich mein mathematisches Verständnis und auch die Fähigkeit, Probleme systematisch anzugehen und zu klären. Nicht zuletzt erweiterte ich beim Bau des Modells auch meine handwerklichen Fähigkeiten. Durch meine Maturaarbeit habe ich zudem einen Einblick in wissenschaftliches Arbeiten gewonnen.

11 Bibliographie

Jehle, Opremann, Zeitler Lineare Geometrie bsv Mathematik S. 50 ff
Kuhn Wildfried Physik Bd.2 westermann S. 105-123

Viele der benötigten Informationen stammen nicht aus Büchern. Ich erhielt sie in zahlreichen Diskussionen, die ich mit Herrn J. Sromicki geführt habe. Bei besonders interessanten Themen haben sich beide Notizen und Zusammenfassungen gemacht, die später ausgetauscht wurden.

12 Danksagung

Ich danke ganz besonders Herrn J.Sromicki für die gute Zusammenarbeit, seinen grossen zeitlichen Aufwand, sein Engagement und sein Interesse an meinem Thema. Weiter möchte ich meinem Mathematiklehrer Herrn Bruno Wicky für das zur Verfügung gestellte Mathematikbuch danken. Mein Dank gilt auch meinem Bruder Roman für die Hilfestellungen beim digitalen Erfassen sowie meine Mutter Brigitte für Tipps und Mithilfe beim digitalen Erfassen und dem kritischen Lesen meiner Arbeit.

13 Deklaration

„Ich erkläre hiermit,

- dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst habe,
- dass ich auf eine eventuelle Mithilfe Dritter in der Arbeit ausdrücklich hinweise,
- dass ich vorgängig die Schulleitung und die betreuende Lehrperson informiere, wenn ich diese Maturaarbeit, bzw. Teile oder Zusammenfassungen davon veröffentlichen werde oder Kopien dieser Arbeit zur weiteren Verbreitung an Dritte aushändigen werde.“

Ort: Sursee

Datum: Montag, 14.Oktober 2002

Unterschrift:

14 Anhang

14.1 Berechnung der inversen Matrix

gesucht: $N \cdot N^{-1} = I^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_1 - 2a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 - 2b_3 = 1 \\ b_1 - b_2 + b_3 = 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 1 \end{vmatrix}$
$\begin{aligned} 3a_1 + 2a_2 &= 2 \\ 3a_1 - 2a_2 &= 0 \\ a_1 &= \frac{1}{3} \\ a_2 &= \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$	$\begin{aligned} 3b_1 + 2b_2 &= 1 \\ 3b_1 - 2b_2 &= 1 \\ b_1 &= \frac{1}{3} \\ b_2 &= 0 \\ b_3 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$	$\begin{aligned} 3c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 3c_1 - 2c_2 &= 2 \\ c_1 &= \frac{1}{3} \\ c_2 &= -\frac{1}{2} \\ c_3 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_N \frac{1}{6} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{N^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I^2}$$

14.2 System mit vier Pendeln

Das System mit vier Pendeln lässt sich analog zu dem mit drei Pendeln lösen.

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) - \frac{mg}{l}x_1 \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2) - \frac{mg}{l}x_2 \\ m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) + k(x_4 - x_3) - \frac{mg}{l}x_3 \\ m\ddot{x}_4 = -k(x_4 - x_3) - \frac{mg}{l}x_4 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_g^2 & -\mathbf{w}_0^2 & 0 & 0 \\ -\mathbf{w}_0^2 & 2\mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_g^2 & -\mathbf{w}_0^2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{w}_0^2 & 2\mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_g^2 & -\mathbf{w}_0^2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{w}_0^2 & \mathbf{w}_0^2 + \mathbf{w}_g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{w}_g^2 + \mathbf{w}^2 = I$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{w}_0^2 - I & -\mathbf{w}_0^2 & 0 & 0 \\ -\mathbf{w}_0^2 & 2\mathbf{w}_0^2 - I & -\mathbf{w}_0^2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{w}_0^2 & 2\mathbf{w}_0^2 - I & -\mathbf{w}_0^2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{w}_0^2 & \mathbf{w}_0^2 - I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-I & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-I & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-I & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-I \end{pmatrix}$$

$$(1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-I) \left[(2-I)^2(1-I) - (2-I) - (1-I) \right] + [-(2-I)(1-I) + 1] = 0$$

$$(2-I)^2(1-I)^2 - (2-I)(1-I) - (1-I)^2 - (2-I)(1-I) + 1 = 0$$

$$(2-I)^2(1-I)^2 - 2(2-I)(1-I) - (1-I)^2 + 1 = 0$$

$$\underbrace{-1 + 2I - I^2 + 1}_{I(2-I)}$$

$$(2-I)[(2-I)(1-I)^2 - 2(1-I) + I] = 0$$

$$(2-I)[-I^3 + 4I^2 - 2I] = 0$$

$$(2-I)I(-I^2 + 4I - 2) = 0$$

$$I = 0$$

$$I = 2$$

$$I = -\frac{1}{2}(-4 \pm 2\sqrt{2})$$

$$I = 2 - \sqrt{2}$$

$$I = 2 + \sqrt{2}$$

$$\underline{w^2 = w_0^2}$$

$$\underline{w^2 = 2w_0^2 + w_g^2}$$

$$\underline{w^2 = w_0^2(2 - \sqrt{2}) + w_g^2}$$

$$\underline{w^2 = w_0^2(2 + \sqrt{2}) + w_g^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1-x & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-x & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} = 0$$

Für $x = 0$

$$\begin{cases} N_1 - N_2 = 0 \\ -N_1 + 2N_2 - N_3 = 0 \\ -N_2 + 2N_3 - N_4 = 0 \\ -N_3 + N_4 = 0 \end{cases} \quad N_1 = N_2 = N_3 = N_4 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $x = 2$

$$\begin{cases} -N_1 - N_2 = 0 \\ -N_1 - N_3 = 0 \\ -N_2 - N_4 = 0 \\ -N_3 - N_4 = 0 \end{cases} \quad N_1 = -N_2 = -N_3 = N_4 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $x = 2 + \sqrt{2}$

$$\begin{cases} (-1 - \sqrt{2})N_1 - N_2 = 0 \\ -N_1 - \sqrt{2}N_2 - N_3 = 0 \\ -N_2 - \sqrt{2}N_3 - N_4 = 0 \\ -N_3 + (-1 - \sqrt{2})N_4 = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad -\sqrt{2}(-1 - \sqrt{2})N_2 - (-1 - \sqrt{2})N_3 - N_2 = 0$$

$$(\sqrt{2} + 1)N_2 + (1 + \sqrt{2})N_3 = 0$$

$$(\sqrt{2} + 1)(N_2 + N_3) = 0 \quad N_2 = -N_3 \quad N_4 = -N_1$$

$$(2) \quad N_2 = N_1(-1 - \sqrt{2})$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für $x = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{cases} (-1 + \sqrt{2})N_1 - N_2 = 0 \\ -N_1 + \sqrt{2}N_2 - N_3 = 0 \\ -N_2 + \sqrt{2}N_3 - N_4 = 0 \\ -N_3 + (-1 + \sqrt{2})N_4 = 0 \end{cases}$$

$$(-1 + \sqrt{2})(\sqrt{2}N_2 - N_3) - N_2 = 0$$

$$(-\sqrt{2} + 2)N_2 - (-1 + \sqrt{2})N_3 - N_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(-\sqrt{2} + 1)N_2 + (-\sqrt{2} + 1)N_3 = 0$$

$$N_2 = N_3$$

14.3 Tabellen zu den Vorversuchen

1. Vorversuch

	T ₁	T ₂	T ₃
Gemessene Zeiten in Sekunden	16:81	11:13	13:25
	16:81	10:97	13:34
	16:88	10:91	13:09
	16:97	11:32	13:21
	16:85	11:03	13:29
	16:88	10:90	13:15
	16:81	10:28	13:10
	16:97	10:19	
	16:81	10:12	
	16:87	10:44	
		10:50	
		10:47	
\bar{x}	16:866	10:688	13:204

Tab. 1: Die Zeiten T für je 19 Schwingungen

14.4 Bilder

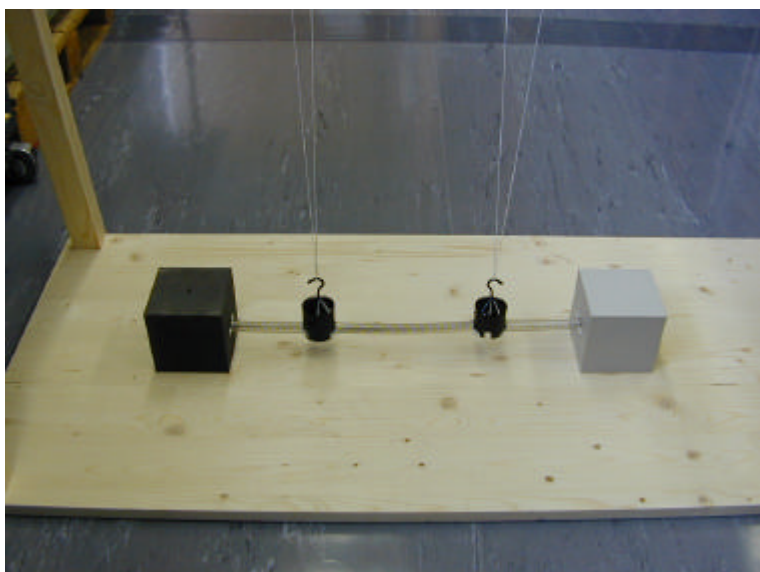


Abb.1: Zwei Pendel in Ruhelage

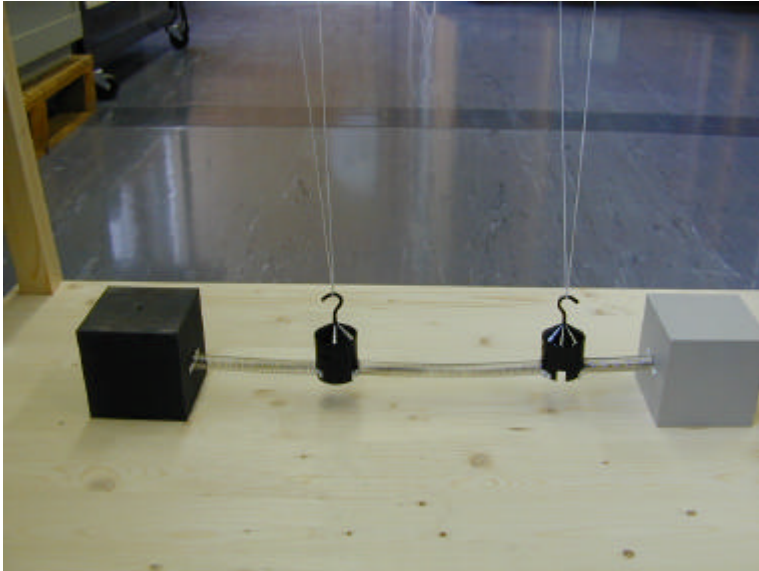


Abb.2: Zwei Pendel mit $w_1^2 = w_g^2$

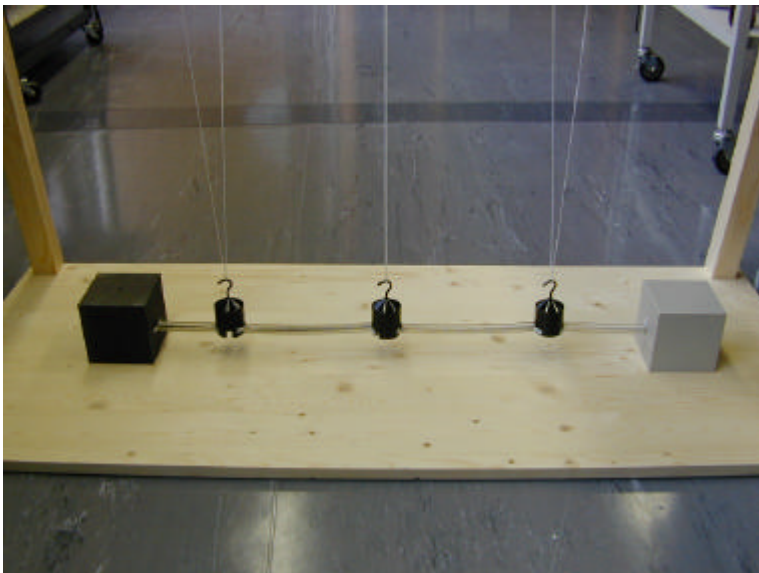


Abb.3: Drei Pendel mit $w_1^2 = w_g^2$

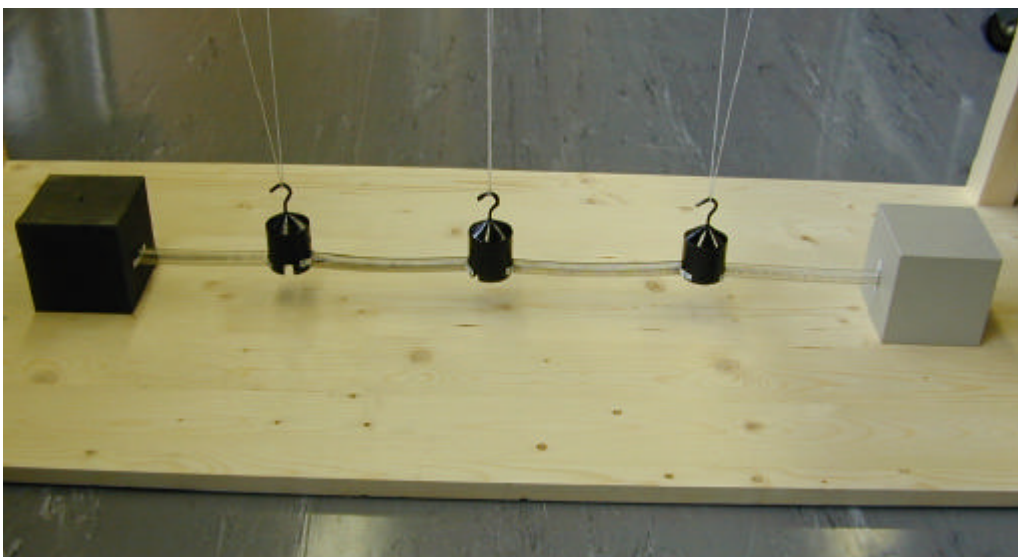


Abb.4: Drei Pendel mit $w_2^2 = w_0^2 + w_g^2$

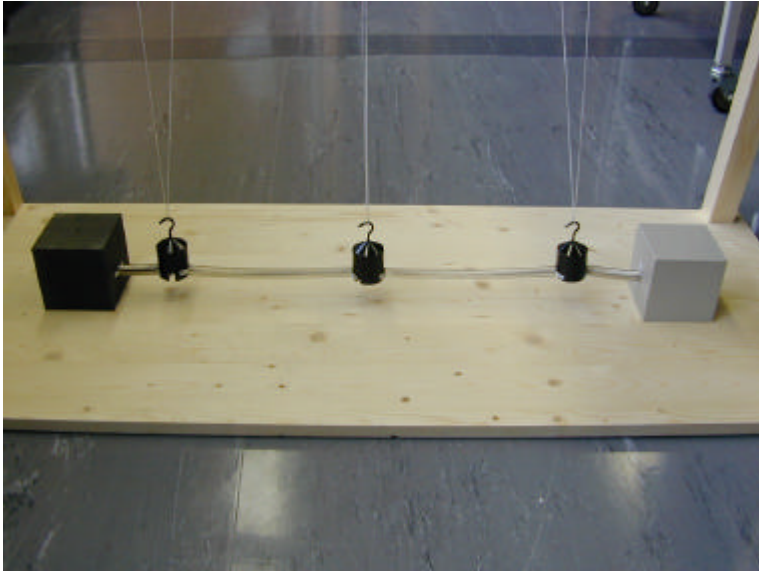


Abb.5: Drei Pendel mit $\omega_2^2 = \omega_0^2 + \omega_g^2$

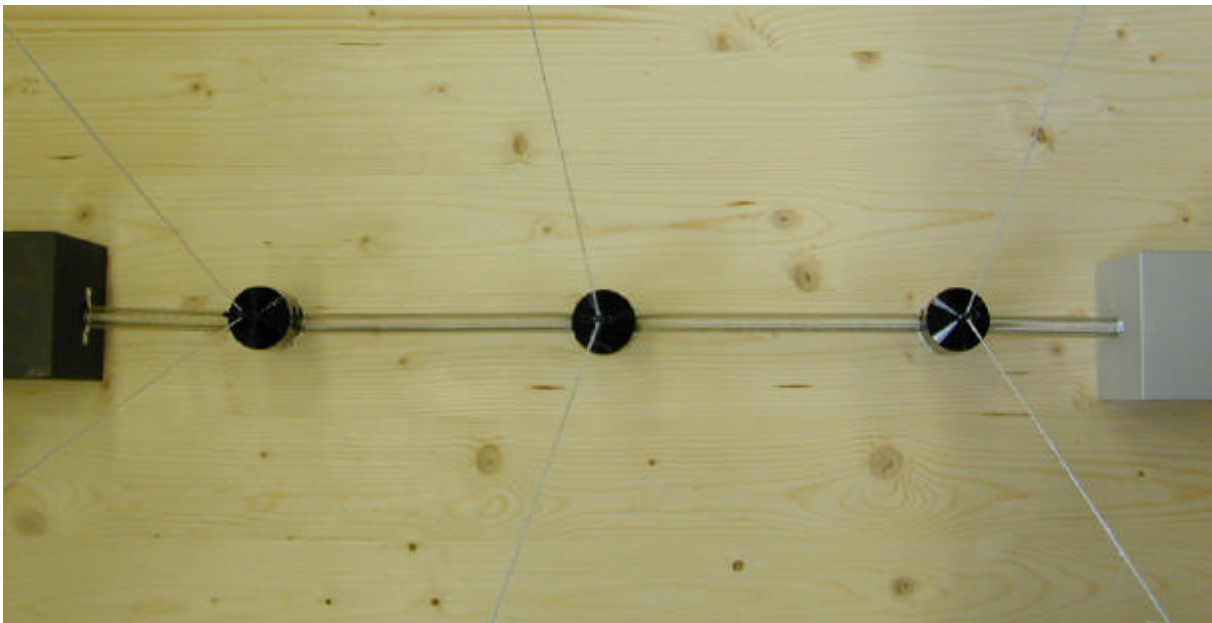


Abb.6: Drei Pendel in Ruhelage (von oben)