

# Repetitionsaufgaben Bruchterme

Zusammengestellt von der Fachschaft Mathematik der Kantonsschule Willisau

## Inhaltsverzeichnis

<b>A) Vorbemerkung .....</b>	<b>1</b>
<b>B) Lernziel .....</b>	<b>1</b>
<b>C) Theorie .....</b>	<b>2</b>
<b>D) Aufgaben .....</b>	<b>4</b>
<b>E) Musterlösungen .....</b>	<b>5</b>

## A) Vorbemerkung

Als Voraussetzungen für diese Repetitionsaufgaben sind insbesondere folgende Repetitionsaufgaben zwingend:

- Negative Zahlen/Brüche/Prozentrechnen, v.a. der Teil über Brüche, auf dem hier wesentlich aufgebaut wird
- Termumformungen

## B) Lernziel

- Bruchterme vereinfachen können

## C) Theorie

- **Erweitern:** Ein Bruchterm kann **erweitert** werden, indem **Zähler und Nenner mit demselben Term  $\neq 0$  multipliziert** werden. Dabei ändert sich der Wert des Bruchterms nicht, die Bruchterme sind **äquivalent** bzw. **gleichwertig**.

**Beispiel:**  $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$ , da der Bruchterm mit  $x$  erweitert wurde.

- **Kürzen:** Ein Bruchterm kann **gekürzt** werden, indem **Zähler und Nenner durch denselben Term  $\neq 0$  dividiert** werden. Kürzen ist also die **Umkehroperation** zum Erweitern.

Es wird in der Regel **immer verlangt**, dass Resultate mit einem komplett **gekürzten Bruchterm** angegeben werden.

**Beispiel:**  $\frac{45ab^2}{18a^2b^5} = \frac{5}{2ab^3}$ , da der Bruchterm mit  $9ab^2$  gekürzt werden konnte.

- „**Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen.**“ lautet die **Merkregel**. Es dürfen ausschliesslich **Faktoren gekürzt** werden.

**Beispiele:**

a)  $\frac{a+b}{bc} \neq \frac{a}{c}$  ( $b$  kann nicht gekürzt werden, weil  $b$  im Zähler kein Faktor ist, sondern ein Summand.)

b)  $\frac{mn+m}{n^2+2n+1} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{m(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{m}{n+1}$  (Der Faktor  $(n+1)$  kann gekürzt werden.)

- **Addition/Subtraktion:** Zwei Bruchterme werden folgendermassen addiert bzw. subtrahiert:
  1. Zähler und Nenner werden wenn möglich **faktorisiert**. Es wird wenn möglich **gekürzt**.
  2. Die Bruchterme werden **gleichnennrig** gemacht, indem geeignet erweitert wird. Es wird der kleinste/einfachste **gemeinsame Nenner (GN)** verwendet.
  3. Die **Zähler** werden **addiert bzw. subtrahiert**, der **Nenner** wird **beibehalten**.
  4. Der Zähler wird wenn möglich **faktorisiert**. Es wird wenn möglich **gekürzt**.

**Beispiele:**

a)  $\frac{6z-5}{z^2-1} - \frac{5z+2}{2z+2} + \frac{3z}{4z-4} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{6z-5}{(z+1)(z-1)} - \frac{5z+2}{2(z+1)} + \frac{3z}{4(z-1)}$   
 $\text{GN} = 4(z+1)(z-1)$   
 $= \frac{4(6z-5)}{4(z+1)(z-1)} - \frac{2(z-1)(5z+2)}{4(z+1)(z-1)} + \frac{(z+1) \cdot 3z}{4(z+1)(z-1)} = \frac{24z-20 - (2z-2)(5z+2) + 3z^2+3z}{4(z+1)(z-1)}$   
 $= \frac{24z-20 - (10z^2+4z-10z-4) + 3z^2+3z}{4(z+1)(z-1)} = \frac{-7z^2+33z-16}{4(z+1)(z-1)}$

b)  $\frac{6y}{x^2-y^2} + \frac{3x+6y}{x^2+3xy+2y^2} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{6y}{(x+y)(x-y)} + \frac{3(x+2y)}{(x+y)(x+2y)} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{6y}{(x+y)(x-y)} + \frac{3}{x+y}$   
 $\text{GN} = (x+y)(x-y)$   
 $= \frac{6y}{(x+y)(x-y)} + \frac{3(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{6y+3x-3y}{(x+y)(x-y)} = \frac{3x+3y}{(x+y)(x-y)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(x+y)}{(x+y)(x-y)} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{3}{x-y}$

- **Multiplikation:** Zwei Bruchterme werden folgendermassen multipliziert:
  1. Zähler und Nenner werden wenn möglich **faktorisiert**. Es wird wenn möglich **gekürzt**.
  2. Der neue Zähler wird durch **Zähler mal Zähler** berechnet.
  3. Der neue Nenner wird durch **Nenner mal Nenner** berechnet.

**Merke:** Die Bruchterme müssen **nicht gleichnennrig** gemacht werden.

**Beispiel:**  $\frac{c}{m^2-n^2} \cdot \frac{5m+5n}{cm-cn} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{c}{(m+n)(m-n)} \cdot \frac{5(m+n)}{c(m-n)} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{1}{m-n} \cdot \frac{5}{m-n} = \frac{1 \cdot 5}{(m-n)(m-n)} = \frac{5}{(m-n)^2}$

- **Division:** Zwei Bruchterme werden folgendermassen dividiert:
  1. Aus der Division wird eine **Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Bruchterms** (Divisor) geschrieben.
  2. Die Multiplikation (vgl. oben) wird durchgeführt.

**Beispiel:** 
$$\frac{3x-12}{4x^2+12x+9} : \frac{x-4}{6x+9} = \frac{3x-12}{4x^2+12x+9} \cdot \frac{6x+9}{x-4} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(x-4)}{(2x+3)^2} \cdot \frac{3(2x+3)}{x-4} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{3}{(2x+3)} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{2x+3}$$

- **Doppelbrüche** sind nichts anderes als die **Division zweier Bruchterme**. Der **grösste Bruchstrich** wird **als Division umgeschrieben** und dann kommt die Division (vgl. oben) zur Anwendung.

**Beispiel:** 
$$\frac{\frac{ax}{b+c}}{\frac{ac^2}{-b-c}} = \frac{ax}{b+c} : \frac{ac^2}{-b-c} = \frac{ax}{b+c} \cdot \frac{-b-c}{ac^2} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{ax}{b+c} \cdot \frac{-(b+c)}{ac^2} \stackrel{\text{kürzen}}{=} \frac{x}{1} \cdot \frac{-1}{c^2} = -\frac{x}{c^2}$$

**Merkregel:** Es kann  $\frac{\text{äussere}}{\text{innere}}$  gerechnet werden. Denn  $ax$  und  $-b - c$  sind die „äusseren“,  $b + c$  und  $ac^2$  sind die „inneren“ Terme des Bruchterms, also  $\frac{ax \cdot (-b-c)}{(b+c) \cdot ac^2}$ .

## D) Aufgaben

1. Kürzen Sie die folgenden Bruchterme so weit wie möglich:

$$a) \frac{xy}{x^3y^2}$$

$$b) \frac{55a(b+1)}{77a^2}$$

$$c) \frac{42a^3b^5(a+b)^3}{28a^4b(a+b)^2}$$

$$d) \frac{x^3-x^2}{x}$$

$$e) \frac{2y+4}{y^2+4y+4}$$

$$f) \frac{4x^2-36}{3x^4-243}$$

$$g) \frac{5ax-25}{5-ax}$$

$$h) \frac{14a+7b}{12a^2+12ab+3b^2}$$

2. Berechnen Sie:

$$a) \frac{4}{2x} + \frac{5}{3x} - \frac{2}{6x}$$

$$b) \frac{2}{5a} - \frac{3}{10a} + \frac{7}{15a}$$

$$c) \frac{3a}{a^2-b^2} + \frac{3b}{a^2-b^2}$$

$$d) \frac{2x}{x-5} + \frac{3x}{x+5}$$

$$e) \frac{3}{2x-1} + \frac{4}{4x-2} - \frac{5}{6x-3}$$

$$f) \frac{5w}{w-3} - \frac{3w}{w+2} - \frac{2w-1}{w^2-w-6}$$

$$g) \frac{z+9}{z^2-1} - \frac{z+5}{z^2+z}$$

$$h) \frac{a+3b}{2a-2b} + \frac{4a-2b}{a+b} - \frac{3a+4b}{2a+2b}$$

$$i) \frac{3x^2+3}{x^4-1} + \frac{5}{2x^2-2}$$

$$j) \frac{ax}{ax-a} - \frac{bx}{b-bx} + \frac{2ab}{abx^2-ab}$$

$$k) \frac{2x-8}{x^2-x-12} - \frac{3x-6}{x^2-5x+6}$$

$$l) \frac{4x^2-4}{x^2-2x+1} - \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$$

3. Berechnen Sie:

$$a) \frac{a}{2x} \cdot \frac{x}{2a}$$

$$b) \frac{2a-2b}{x} \cdot \frac{y}{3a-3b}$$

$$c) \frac{4(x+2)}{5} \cdot \frac{25x}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2x+4}{35}$$

$$d) \frac{15x^2}{2x^4-32} \cdot \frac{3x^2-12}{5x}$$

$$e) \frac{x^2+4x+4}{4z} \cdot \frac{8z}{x^2+5x+6}$$

$$f) \left(-\frac{x+y}{x-y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)$$

4. Berechnen Sie:

$$a) \frac{2x}{3} : \frac{3x}{4}$$

$$b) \frac{4x+12}{x-3} : (x+3)$$

$$c) \frac{48}{23b} : \left(-\frac{24b^5}{5}\right)$$

$$d) \frac{4x^2-12x+9}{9x^2+6x+1} : \frac{2ax-3a}{6x+2}$$

$$e) \frac{(x+3y)^2}{6xy} : \frac{6xy}{6y+2x}$$

$$f) \frac{x^2+4x-12}{x^2-x-6} : \frac{x^2-7x+6}{x^2-4x+3}$$

5. Berechnen Sie:

$$a) \frac{4bd}{c} \cdot \left(\frac{3a}{4b} + \frac{15c}{6d}\right)$$

$$b) \left(\frac{36p^2}{7y^3} - \frac{24q^2}{5y^2}\right) \cdot \frac{35y^2}{6pq}$$

$$c) \left(\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{a}{b}\right)$$

$$d) \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right)^2$$

## E) Musterlösungen

1. a)  $\frac{xy}{x^3y^2} \stackrel{\text{kürzen mit } xy}{=} \frac{1}{x^2y}$
- b)  $\frac{55a(b+1)}{77a^2} \stackrel{\text{kürzen mit } 11a}{=} \frac{5(b+1)}{7a}$
- c)  $\frac{42a^3b^5(a+b)^3}{28a^4b(a+b)^2} \stackrel{\text{kürzen mit } 14a^3b(a+b)^2}{=} \frac{3b^4(a+b)}{2a}$
- d)  $\frac{x^3-x^2}{x} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{x^2(x-1)}{x} \stackrel{\text{kürzen mit } x}{=} \frac{x(x-1)}{1} = x(x-1)$
- e)  $\frac{2y+4}{y^2+4y+4} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(y+2)}{(y+2)^2} \stackrel{\text{kürzen mit } (y+2)}{=} \frac{2}{y+2}$
- f)  $\frac{4x^2-36}{3x^4-243} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x^2-9)}{3(x^4-81)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+3)(x-3)}{3(x^2+9)(x^2-9)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+3)(x-3)}{3(x^2+9)(x+3)(x-3)}$   
 kürzen mit  $(x+3)(x-3)$   $\frac{4}{3(x^2+9)}$
- g)  $\frac{5ax-25}{5-ax} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5(ax-5)}{5-ax} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5(ax-5)}{-1(ax-5)} \stackrel{\text{kürzen mit } (ax-5)}{=} \frac{5}{-1} = -5$
- h)  $\frac{14a+7b}{12a^2+12ab+3b^2} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{7(2a+b)}{3(4a^2+4ab+b^2)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{7(2a+b)}{3(2a+b)^2} \stackrel{\text{kürzen mit } (2a+b)}{=} \frac{7}{3(2a+b)}$
2. a)  $\frac{4}{2x} + \frac{5}{3x} - \frac{2}{6x} \stackrel{\text{GN}=6x}{=} \frac{12}{6x} + \frac{10}{6x} - \frac{2}{6x} = \frac{20}{6x} \stackrel{\text{kürzen mit } 2}{=} \frac{10}{3x}$
- b)  $\frac{2}{5a} - \frac{3}{10a} + \frac{7}{15a} \stackrel{\text{GN}=30a}{=} \frac{12}{30a} - \frac{9}{30a} + \frac{14}{30a} = \frac{17}{30a}$
- c)  $\frac{3a}{a^2-b^2} + \frac{3b}{a^2-b^2} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3a}{(a+b)(a-b)} + \frac{3b}{(a+b)(a-b)} \stackrel{\text{GN}=(a+b)(a-b)}{=} \frac{3a+3b}{(a+b)(a-b)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(a+b)}{(a+b)(a-b)}$   
 kürzen mit  $(a+b)$   $\frac{3}{a-b}$
- d)  $\frac{2x}{x-5} + \frac{3x}{x+5} \stackrel{\text{GN}=(x+5)(x-5)}{=} \frac{2x(x+5)}{(x+5)(x-5)} + \frac{3x(x-5)}{(x+5)(x-5)} = \frac{2x^2+10x+(3x^2-15x)}{(x+5)(x-5)} = \frac{5x^2-5x}{(x+5)(x-5)}$   
 faktorisieren  $\frac{5x(x-1)}{(x+5)(x-5)}$
- e)  $\frac{3}{2x-1} + \frac{4}{4x-2} - \frac{5}{6x-3} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3}{2x-1} + \frac{4}{2(2x-1)} - \frac{5}{3(2x-1)}$   
 kürzen mit 2  $\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{2x-1} - \frac{5}{3(2x-1)} \stackrel{\text{GN}=3(2x-1)}{=} \frac{9}{3(2x-1)} + \frac{6}{3(2x-1)} - \frac{5}{3(2x-1)} = \frac{10}{3(2x-1)}$
- f)  $\frac{5w}{w-3} - \frac{3w}{w+2} - \frac{2w-1}{w^2-w-6} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5w}{w-3} - \frac{3w}{w+2} - \frac{2w-1}{(w+2)(w-3)}$   
 GN=(w+2)(w-3)  $\frac{(w+2) \cdot 5w}{(w+2)(w-3)} - \frac{(w-3) \cdot 3w}{(w+2)(w-3)} - \frac{2w-1}{(w+2)(w-3)} = \frac{5w^2+10w-(3w^2-9w)-(2w-1)}{(w+2)(w-3)} = \frac{2w^2+17w+1}{(w+2)(w-3)}$
- g)  $\frac{z+9}{z^2-1} - \frac{z+5}{z^2+z} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{z+9}{(z+1)(z-1)} - \frac{z+5}{z(z+1)} \stackrel{\text{GN}=z(z+1)(z-1)}{=} \frac{z(z+9)}{z(z+1)(z-1)} - \frac{(z-1)(z+5)}{z(z+1)(z-1)}$   
 $= \frac{z^2+9z-(z^2+4z-5)}{z(z+1)(z-1)} = \frac{5z+5}{z(z+1)(z-1)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{5(z+1)}{z(z+1)(z-1)} \stackrel{\text{kürzen mit } (z+1)}{=} \frac{5}{z(z-1)}$
- h)  $\frac{a+3b}{2a-2b} + \frac{4a-2b}{a+b} - \frac{3a+4b}{2a+2b} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{a+3b}{2(a-b)} + \frac{2(2a-b)}{a+b} - \frac{3a+4b}{2(a+b)}$   
 GN=2(a-b)(a+b)  $\frac{(a+b)(a+3b)}{2(a-b)(a+b)} + \frac{2(a-b) \cdot 2(2a-b)}{2(a-b)(a+b)} - \frac{(a-b)(3a+4b)}{2(a-b)(a+b)}$   
 $= \frac{a^2+4ab+3b^2+4(2a^2-3ab+b^2)-(3a^2+ab-4b^2)}{2(a-b)(a+b)} = \frac{6a^2-9ab+11b^2}{2(a-b)(a+b)}$
- i)  $\frac{3x^2+3}{x^4-1} + \frac{5}{2x^2-2} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{3(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)} + \frac{5}{2(x^2-1)} \stackrel{\text{kürzen mit } (x^2+1), \text{ faktorisieren}}{=} \frac{3}{(x+1)(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)(x-1)}$   
 GN=2(x+1)(x-1)  $\frac{6}{2(x+1)(x-1)} + \frac{5}{2(x+1)(x-1)} = \frac{11}{2(x+1)(x-1)}$

$$j) \frac{ax}{ax-a} - \frac{bx}{b-bx} + \frac{2ab}{abx^2-ab} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{ax}{a(x-1)} - \frac{bx}{b(1-x)} + \frac{2ab}{ab(x^2-1)}$$

$$\text{kürzen mit } a \text{ bzw. } b \text{ bzw. } ab \stackrel{=}{=} \frac{x}{x-1} - \frac{x}{1-x} + \frac{2}{(x^2-1)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{x}{x-1} - \frac{x}{-(x-1)} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$\text{GN}=(x+1)(x-1) \stackrel{=}{=} \frac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)} + \frac{(x+1)x}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+x+x^2+x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2+2x+2}{(x+1)(x-1)} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$k) \frac{2x-8}{x^2-x-12} - \frac{3x-6}{x^2-5x+6} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(x-4)}{(x-4)(x+3)} - \frac{3(x-2)}{(x-2)(x-3)} \stackrel{\text{kürzen mit } (x-4) \text{ bzw. } (x-2)}{=} \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x-3}$$

$$\text{GN}=(x+3)(x-3) \stackrel{=}{=} \frac{(x-3) \cdot 2}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x+3) \cdot 3}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x-6-(3x+9)}{(x+3)(x-3)} = \frac{-x-15}{(x+3)(x-3)}$$

$$l) \frac{4x^2-4}{x^2-2x+1} - \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x^2-1)}{(x-1)^2} - \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} \stackrel{\text{faktorisieren, kürzen mit } (x+1)}{=} \frac{4(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{x-1}{x+1}$$

$$\text{kürzen mit } (x-1) \stackrel{=}{=} \frac{4(x+1)}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \stackrel{\text{GN}=(x+1)(x-1)}{=} \frac{4(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{4(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{3x^2+10x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$3. a) \frac{a}{2x} \cdot \frac{x}{2a} \stackrel{\text{kürzen mit } a \text{ und } x}{=} \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$b) \frac{2a-2b}{x} \cdot \frac{y}{3a-3b} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{2(a-b)}{x} \cdot \frac{y}{3(a-b)} \stackrel{\text{kürzen mit } (a-b)}{=} \frac{2}{x} \cdot \frac{y}{3} = \frac{2y}{3x}$$

$$c) \frac{4(x+2)}{5} \cdot \frac{25x}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2x+4}{35} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+2)}{5} \cdot \frac{25x}{(x+2)^2} \cdot \frac{2(x+2)}{35} \stackrel{\text{kürzen mit } 25(x+2)^2}{=} \frac{4}{1} \cdot \frac{x}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{8x}{7}$$

$$d) \frac{15x^2}{2x^4-32} \cdot \frac{3x^2-12}{5x} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{15x^2}{2(x^4-16)} \cdot \frac{3(x^2-4)}{5x} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{15x^2}{2(x^2+4)(x^2-4)} \cdot \frac{3(x+2)(x-2)}{5x}$$

$$\stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{15x^2}{2(x^2+4)(x+2)(x-2)} \cdot \frac{3(x+2)(x-2)}{5x} \stackrel{\text{kürzen mit } 5x(x+2)(x-2)}{=} \frac{3x}{2(x^2+4)} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9x}{2(x^2+4)}$$

$$e) \frac{x^2+4x+4}{4z} \cdot \frac{8z}{x^2+5x+6} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(x+2)^2}{4z} \cdot \frac{8z}{(x+2)(x+3)} \stackrel{\text{kürzen mit } 4z(x+2)}{=} \frac{x+2}{1} \cdot \frac{2}{x+3} = \frac{2(x+2)}{x+3}$$

$$f) \left(-\frac{x+y}{x-y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{x(x+y)^2}{y(x-y)^2}$$

$$4. a) \frac{2x}{3} : \frac{3x}{4} = \frac{2x}{3} \cdot \frac{4}{3x} \stackrel{\text{kürzen mit } x}{=} \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

$$b) \frac{4x+12}{x-3} : (x+3) = \frac{4x+12}{x-3} \cdot \frac{1}{x+3} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{4(x+3)}{x-3} \cdot \frac{1}{x+3} \stackrel{\text{kürzen mit } (x+3)}{=} \frac{4}{x-3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4}{x-3}$$

$$c) \frac{48}{23b} : \left(-\frac{24b^5}{5}\right) = \frac{48}{23b} \cdot \left(-\frac{5}{24b^5}\right) \stackrel{\text{kürzen mit } 24}{=} \frac{2}{23b} \cdot \left(-\frac{5}{b^5}\right) = -\frac{10}{23b^6}$$

$$d) \frac{4x^2-12x+9}{9x^2+6x+1} : \frac{2ax-3a}{6x+2} = \frac{4x^2-12x+9}{9x^2+6x+1} \cdot \frac{6x+2}{2ax-3a} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(2x-3)^2}{(3x+1)^2} \cdot \frac{2(3x+1)}{a(2x-3)} \stackrel{\text{kürzen mit } (2x-3)(3x+1)}{=} \frac{2x-3}{3x+1} \cdot \frac{2}{a}$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{2(2x-3)}{a(3x+1)}$$

$$e) \frac{6xy}{6y+2x} = \frac{(x+3y)^2}{6xy} : \frac{6y+2x}{xy} = \frac{(x+3y)^2}{6xy} \cdot \frac{xy}{6y+2x} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(x+3y)^2}{6xy} \cdot \frac{xy}{2(3y+x)}$$

$$\text{kürzen mit } xy(x+3y) \stackrel{=}{=} \frac{x+3y}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x+3y}{12}$$

$$f) \frac{x^2+4x-12}{x^2-7x+6} = \frac{x^2+4x-12}{x^2-x-6} : \frac{x^2+7x+6}{x^2-4x+3} = \frac{x^2+4x-12}{x^2-x-6} \cdot \frac{x^2-4x+3}{x^2+7x+6} \stackrel{\text{faktorisieren}}{=} \frac{(x+6)(x-2)}{(x-3)(x+2)} \cdot \frac{(x-3)(x-1)}{(x+6)(x+1)}$$

$$\text{kürzen mit } (x+6)(x-3) \stackrel{=}{=} \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}$$

$$5. \text{ a) } \frac{4bd}{c} \cdot \left( \frac{3a}{4b} + \frac{15c}{6d} \right) \stackrel{\text{kürzen mit 3}}{=} \frac{4bd}{c} \cdot \left( \frac{3a}{4b} + \frac{5c}{2d} \right) \stackrel{\text{GN}=4bd}{=} \frac{4bd}{c} \cdot \left( \frac{3ad}{4bd} + \frac{10bc}{4bd} \right) = \frac{4bd}{c} \cdot \frac{3ad+10bc}{4bd}$$

kürzen mit  $4bd$   $\frac{1}{c} \cdot \frac{3ad+10bc}{1} = \frac{3ad+10bc}{c}$

$$\text{b) } \left( \frac{36p^2}{7y^3} - \frac{24q^2}{5y^2} \right) \cdot \frac{35y^2}{6pq} \stackrel{\text{GN}=35y^3}{=} \left( \frac{180p^2}{35y^3} - \frac{168q^2y}{35y^3} \right) \cdot \frac{35y^2}{6pq} = \frac{180p^2-168q^2y}{35y^3} \cdot \frac{35y^2}{6pq}$$

faktorisieren  $\frac{12(15p^2-14q^2y)}{35y^3} \cdot \frac{35y^2}{6pq} \stackrel{\text{kürzen mit } 6 \cdot 35y^2}{=} \frac{2(15p^2-14q^2y)}{y} \cdot \frac{1}{pq} = \frac{2(15p^2-14q^2y)}{pqy}$

$$\text{c) } \left( \frac{x}{y} + \frac{a}{b} \right) \cdot \left( \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right) \stackrel{\text{GN}=by}{=} \left( \frac{bx}{by} + \frac{ay}{by} \right) \cdot \left( \frac{bx}{by} - \frac{ay}{by} \right) = \left( \frac{bx+ay}{by} \right) \cdot \left( \frac{bx-ay}{by} \right) = \frac{(bx+ay)(bx-ay)}{b^2y^2}$$

Variante:  $\left( \frac{x}{y} + \frac{a}{b} \right) \cdot \left( \frac{x}{y} - \frac{a}{b} \right) \stackrel{3. \text{ binomische Formel}}{=} \frac{x^2}{y^2} - \frac{a^2}{b^2} \stackrel{\text{GN}=b^2y^2}{=} \frac{b^2x^2}{a^2y^2} - \frac{a^2y^2}{b^2y^2} = \frac{b^2x^2-a^2y^2}{b^2y^2}$

faktorisieren  $\frac{(bx+ay)(bx-ay)}{b^2y^2}$

$$\text{d) } \left( \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right)^2 \stackrel{\text{GN}=(x-y)(x+y)}{=} \left( \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} - \frac{(x-y)}{(x-y)(x+y)} \right)^2 = \left( \frac{x+y-(x-y)}{(x-y)(x+y)} \right)^2 = \left( \frac{2y}{(x-y)(x+y)} \right)^2$$

$= \frac{4y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$

Variante:  $\left( \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} \right)^2 \stackrel{2. \text{ binomische Formel}}{=} \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2}{(x-y)(x+y)} + \frac{1}{(x+y)^2}$

$$\text{GN}=(x-y)^2(x+y)^2 \quad \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2} - \frac{2(x-y)(x+y)}{(x-y)^2(x+y)^2} + \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2} = \frac{x^2+2xy+y^2-2(x^2-y^2)+x^2-2xy+y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$$

$= \frac{4y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$